



琉球大学

University of the Ryukyus

Title	統計数理はいま...第67回 判断・推測・方法(1)トレーラーを移動する
Author(s)	前原, 潤
Citation	エストレーラ(130): 60-63
Issue Date	2005-01
URL	http://ir.lib.u-ryukyu.ac.jp/handle/123456789/306
Rights	

琉球大学学術リポジトリ
University of the Ryukyus Repository



琉球大学学術リポジトリ
University of the Ryukyus Repository



トレーラーを移動する

前原 潤 | Maehara Hiroshi

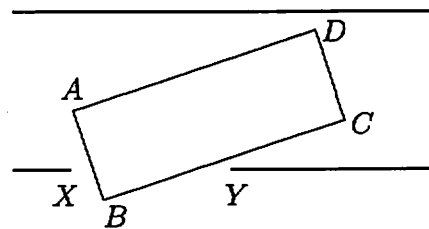
これから数回にわたって、いろいろな問題の話をしていきます。可能かどうかを判断したり、どんな結果になるか推測したり、あるいはどうすればいいか、その方法を考える、といったような話です。内容は必ずしも統計数理に関係するとは限りませんが、広い意味でのORの問題で、具体的、実際的なものを扱います。

1 駐車場に入れる

狭い駐車スペースに車を止めるのはなかなか大変だ。私などは運転が下手なので、大学構内の駐車場に車を止める時も、ちょうど1台分しか空いてないときは大変苦労する。時には無理だと諦めて他の遠い方の空いている駐車場に行くこともある。特にバックで駐車するのは難しい。

図1は、ある道路わきの駐車場に、どういふわけか大きなトレーラーが駐車しようとしているところを示している。道路の両側にはガードレールがあり、駐車場の入り口の分だけガードレールに切れ目がある。道路幅は5m、駐車場の入り口では、ガードレールに5mの切れ目がある。トレーラーはずいぶん大きいもので、上から見て3m

×8mの長方形とみなすことができる。このトレーラーを駐車場に入れることが出来さえすれば、駐車場は広いので、どこか適当なところに止めることができる。トレーラーを駐車場に入れることができるだろうか。もちろんトレーラーは一部分であっても道路からはみ出すことは出来ない。ガードレールがかかるのだ。また、運転手は、運転の名人で、トレーラーをどのようにでも動かすことができるものとする。



駐車場

図1：トレーラー ABCD

では、どうなのだろう。トレーラーを駐車場に入れることができるだろうか。

まず、トレーラーの前部 AB を駐車場に入れることができれば、中は広いのだから、そのままどんどん進めばトレーラーが全部駐車場に入ることになる。従って AB を入れることができればよい。また、AB を駐車

場に入れることが出来なければ、明らかにトレーラーを駐車場に入れることはできない。運転手の取る方策は、とりあえずBのカドを駐車場に入れ、少しずつ反時計方向に回転してAを入れるようにすることだ。では、どうしてもAが入るところまで動かすことが出来ないと仮定してみよう。その場合どんなことが起こっている？ 図2のように、辺ABがガードレールの切れ目Xに当り、辺BCがYに当り、長方形のカドDが駐車場の反対側のガードレールに当たるとい状況が起こるはずだ。

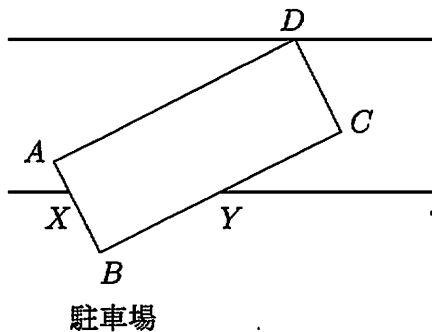


図2：トレーラーが進めない

ここで「長方形に含まれる三角形の面積の最大値は、長方形の面積の半分に等しい」という事実を用いる。これについては後で説明する。図2のような状態が起こったとせよ。すると、三角形XYDは長方形ABCDに含まれるから（わずかな違いは無視している）、その面積は長方形ABCDの半分以下、つまり、 $3 \times 8 / 2 = 12 (m^2)$ 以下である。ところが、三角形XYDの底辺をXYとすると、高さは道路の幅だから、その面積は $5 \times 5 / 2 = 12.5 (m^2)$ となる。これは矛盾している。従って、長方形ABCDが、X,Yおよび駐車場の向かいのガードレールに同時に触ることはできないのである。つまり、トレーラーを駐車場に入れることができるわけだ。

この議論から、もっと一般に、道路幅をa、駐車場の入り口の幅をb、トレーラーの幅をc（ただし、 $c < a, c < b$ とする）、トレーラーの長さをdとすると、

$$c \times d < a \times b$$

が成り立つならトレーラーは駐車場に入れられることがわかる。逆に、トレーラーを駐車場に入れることができるなら、 $c \times d < a \times b$ である。実際、駐車場に入れることができるなら、図3のようにトレーラーのカドAが駐車場の入り口を通過する瞬間がある。このとき直線XYと辺BCの交点をWとおく。

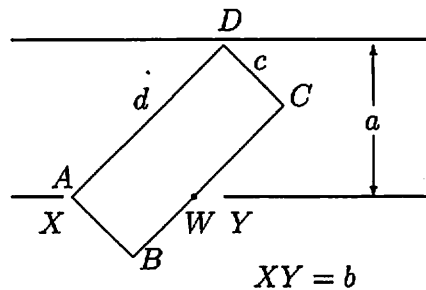


図3：トレーラーが入る

すると、三角形AWDの面積は長方形ABCDの面積の半分で、 $c \times d / 2$ に等しい。一方、三角形AWDの面積は三角形XYDの面積より小さいから、 $a \times b / 2$ より小さい。ゆえに $c \times d < a \times b$ である。

2 長方形の中の三角形

では、先ほど述べた「長方形に含まれる三角形の面積の最大値は長方形の面積の半分に等しい」という事実を証明しよう。証明は、線形計画法のシンプレックス法に相当するものを用いる。

長方形の中に三角形 XYZ があるとせよ。辺 XY を底辺と見て、それを水平に見るように、図4のように、長方形を傾ける。

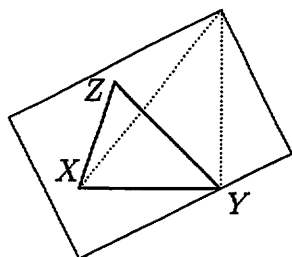


図4：面積を大きくする

頂点 Z を高くすれば三角形 XYZ の面積は大きくなるから、 Z を斜めになった長方形の一番高い頂点に移動して、面積を大きくする。次に YZ を底辺として、それが水平なるように長方形を傾ける。こんどは、 X を斜めになった長方形の一番高い頂点に移動して面積を大きくする。最後に、辺 XZ を底辺として水平に置き、 Y を最も高い頂点の位置に移動する。(この場合、すでに XZ が長方形の1辺になっているので、最も高い頂点は2つある。その1つを選ぶ。) すると三角形の面積は増加することはあっても、減少することはない。つまり、長方形に含まれるどんな三角形についても、三角形の面積を減少させずに3頂点を長方形の3つのカドに移動することができる。3頂点が長方形の3つのカドにある三角形の面積は長方形の面積の半分だから、長方形に含まれる三角形の面積の最大値は長方形の面積の半分である。

この方法は四面体の体積にも使える。直方体の中にある四面体で体積が最大のもの、四面体の4つの頂点が直方体の4つの頂点に一致する場合として実現できる。従って、直方体に含まれる四面体の体積の最大値は、直方体の体積の3分の1に等しい。

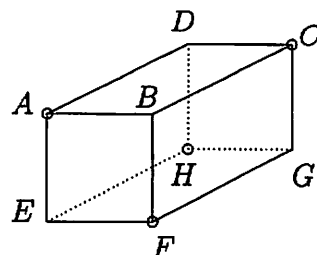


図5：直方体の4頂点を選ぶ

実際、図5の直方体 $ABCD-EFGH$ において、頂点を4つ選んで作られる四面体のうち、四面体 $ACFH$ が体積最大のものの1つで、その体積は、直方体の体積から、4つの四面体

$$AFCB, AFHE, ACHD, CFHG$$

の体積を引いたものである。これら4つの四面体の体積はいずれも直方体の体積の6分の1であるから、残りの四面体 $ACFH$ の体積は直方体の体積の3分の1となる。

同様に、底面が直径 a の円で、高さが b の円柱に含まれる四面体の体積の最大値が $ab/12$ となることも示すことができる。

3 かどを曲がる

こんどは、先ほどの $3\text{ m} \times 8\text{ m}$ のトレーラーが、道幅 4.05 m の道路と道幅 6 m の道路が直角に出会っているL字型のコーナーを曲がることができるかという問題を考えてみよう。

もっと一般に、幅 a, b の道路が直角に出会っているL字型のコーナーを、幅 c のトレーラーが曲がることができるとき、このトレーラーの長さの最大値はいくらか考えてみる。

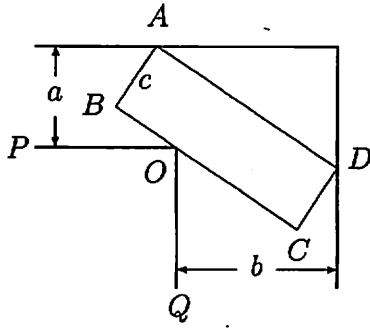


図6: コーナーをギリギリで回る

図6はコーナーを回れる最大長のトレーラーがコーナーを曲がるギリギリの瞬間を描いている。コーナーを曲がれる最大長のトレーラーの場合には、図6のように、カドA, Dがガードレールに接し、辺BCが道路のカドOに接する状態が起こるはずである。さもないと、もっと長いトレーラーでも曲がれることになるからだ。

図6の点Oを原点、 \overrightarrow{PO} をx軸、 \overrightarrow{QO} をy軸としよう(図7)。トレーラーが辺BCで点Oに接しながらコーナーを回っていくとき、辺ADはOを中心とする半径cの円に接して動く。従って、コーナーを回ることができるトレーラーの長さの最大値は、Oを中心とする半径cの円に第1象限で接する直線から道路が切り取る部分の長さの最小値に等しい。トレーラーの長さがこの長さを超えると、トレーラーは道路からはみ出してしまふからだ。

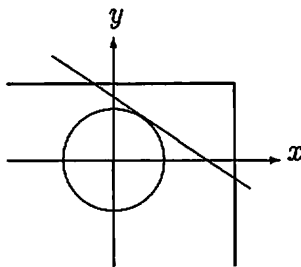


図7: 円に接する直線

原点Oを中心とする半径cの円に第1象限の点 $(c \cos \theta, c \sin \theta)$ で接する直線は

$$x \cos \theta + y \sin \theta = c \quad (0 < \theta < \pi/2)$$

と表わすことができる。(これはヘッセ(Hesse)の標準形と呼ばれるものである。)この直線と、直線 $y = a$ 、及び、直線 $x = b$ との交点を求めると、

$$\left(\frac{c - a \sin \theta}{\cos \theta}, a \right), \left(b, \frac{c - b \cos \theta}{\sin \theta} \right)$$

となる。これら2点間の距離を $f(\theta)$ で表す。すなわち

$$f(\theta) =$$

$$\sqrt{\left(\frac{c - a \sin \theta}{\cos \theta} - b \right)^2 + \left(a - \frac{c - b \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2}$$

である。コーナーを曲がることのできるようなトレーラーの長さの最大値はこの関数 $f(\theta)$ の最小値に等しい。

3つの数値 a, b, c が与えられたとき、関数 $f(\theta)$ の最小値は、MathematicaやMapleなどを用いるとすぐに数値計算ができる。(たとえば、MathematicaだとFindMinimumというコマンドを使えばよい。)

$a = 4.05, b = 6, c = 3$ とすると、 $f(\theta)$ の最小値は7.99791となる。よって、3m×8mのトレーラーで、幅4.05mと6mの道路が直角に出会うL字形のコーナーを曲がることは出来ない。 $a = 4.1, b = 6, c = 3$ とすると、 $f(\theta)$ の最小値は8.08715となり、このトレーラーはどうかコーナーを曲がることのできる。