



琉球大学学術リポジトリ

University of the Ryukyus Repository

Title	LMS法に基づく2次元適応ボルテラフィルタ
Author(s)	金城, 唯司; 半場, 滋; 宮城, 隼夫; 山下, 勝己
Citation	琉球大学工学部紀要(55): 61-64
Issue Date	1998-03
URL	http://hdl.handle.net/20.500.12000/13807
Rights	

LMS法に基づく2次元適応ボルテラフィルタ

金城 唯司* 半場 滋** 宮城 隼夫*** 山下 勝己**

A 2-D Adaptive Volterra Filter Based on LMS Method

Tadashi KINJYO* Shigeru HANBA** Hayao MIYAGI*** Katsumi YAMASHITA**

Abstract

The Volterra filter is a nonlinear filter presented by the Volterra series expansion which is well known as a generalization of the Taylor series expansion. From a practical point of view, a number of applications have been limited to using second-order Volterra filters, because of the computational complexity that exponentially increases with the Volterra filter order. On the other hand, few researchers have attempted to design two-dimensional (2-D) Volterra filters in 2-D signal fields. The purpose of this paper is to present a 2-D Volterra filter which can deal with 2-D signal such as image signal and determine the optimum Volterra kernel in the same manner as the approach for 1-D case, based on the assumption that the input field is Gaussian. Also, 2-D adaptive Volterra filter based on LMS algorithm is designed, and then, for 2-D system identification, the effectiveness of the proposed adaptive filter is evaluated using digital computer simulations.

Key Words: volterra filter, 2-D signal processing, system identification.

1. まえがき

ボルテラフィルタは、テイラー級数展開の一般化として良く知られているボルテラ級数展開からなる非線形フィルタであり [1]、その多くは1次元信号を対象としたものである。ボルテラフィルタは次数の増加に伴い膨大な演算量を必要とすることから、2次のボルテラ核で打ち切った2次のボルテラフィルタが、実際の見地から数多く用いられている。また、2次のボルテラフィルタに対して入力信号をガウス過程信号と仮定した際には、最適なボルテラ核が簡単な行列演算より容易に決定し得ることが報告されている [2]。しかしながら、同手法の対象信号は1次元信号より、画像等の2次元信号を直接取り扱うことはできない。2次元信号を取り扱う際には、先ず2次元格子領域におけるデータに対し因果性の概念を導入する必要がある。また、2次元ボルテラフィルタのマスク領域を設定する必要がある。因果性を考慮した2次元マスクとしては4分の1平面 (QP) モデルと非対称半平面 (AHP) モデルを考えることができる [3]。

本論文では、2次元信号を取り扱うことができる2次元ボルテラフィルタを設計するが、マスク領域としては2次元フィルタ設計において良く用いられているQPモデル

を用いる。また、フィルタ入力としては2次元ガウス過程信号を仮定し、同入力信号を用いた際の最適なボルテラ核の導出方法を示すと共に、LMSに基づく2次元適応アルゴリズムを導出する。更に、本手法を1次および2次のボルテラ核をもつ2次元ボルテラシステムの同定問題に応用し、同手法の有効性を計算機シミュレーションにより検証すると共に、2次元線形フィルタとの比較を所望信号で正規化した誤差信号のMSEを用いて行なう。

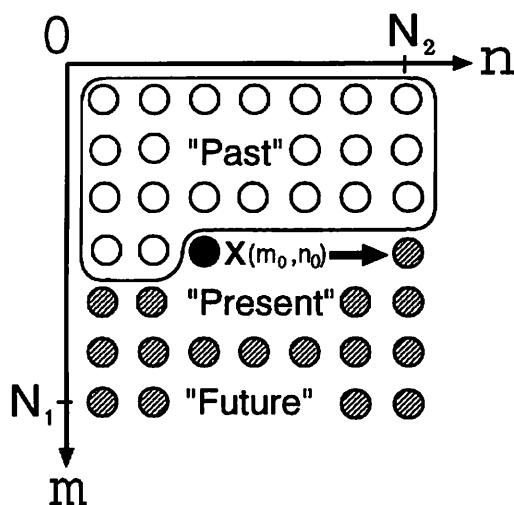


図1 2次元信号の順序づけ

2. 2次元ボルテラフィルタの設計

2次元ボルテラフィルタを設計する際、先ず2次元格子領域におけるデータ $x(m, n)$ に対し因果性の概念を導入する必要がある。ここでは、2次元データの読み取りを行方

受理：1997年12月1日

デジタル信号処理シンポジウムにおいて平成10年11月発表済み

* 大学院工学研究科 電気電子工学専攻

(Graduate Student, Electrical and Electronic Engineering)

** 工学部電気電子工学科

(Dept. of Electrical and Electronic Engineering, Fac. of Eng.)

*** 工学部情報工学科

(Dept. of Information Engineering, Fac. of Eng.)

向のラスタ走査により行なうものとし、すなわち、2次元格子領域におけるデータを左端から右に順次読み取り、右端に到達すれば1行下がり、また左端から右にデータを順次読み取るものとする。このとき、任意の現在点 (m_0, n_0) に対して、“過去”、“現在”および“未来”の概念を図1のように定義する。すなわち、現在点に対して過去を

$$\{(m, n) | m < m_0 \text{ or } m = m_0 \text{ and } n < n_0\} \quad (1)$$

として定義し、残りの点を未来として定義する。

次に、2次元ボルテラフィルタのマスク領域を設定する必要があるが、因果性を考慮した2次元マスクとしてはQPモデルとAHPモデルを考えることができる。ここでは、2次元フィルタ設計において一般に用いられるQPモデルを用いる。このとき、1次および2次のボルテラ核を考慮したQPモデルのマスクをもつ2次元ボルテラフィルタの (m, n) 点における出力 $y(m, n)$ は次式のように定義することができる。

$$\begin{aligned} y(m, n) = & h_{0,0} + \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} a(i, j) x(m-i, n-j) \\ & + \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} b(i, j, k, l) x(m-i, n-j) \\ & \times x(m-k, n-l) \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、 $h_{0,0}$ はバイアス項を示し、 $a(i, j)$ および $b(i, j, k, l)$ は1次および2次のボルテラ核の要素を示す。また、2次のボルテラ核の要素に関して、一般性を失うことなく $b(i, j, k, l) = b(k, l, i, j)$ の関係が成立する。いま、入力信号 $x(m, n)$ を平均零の定常過程信号と仮定し、また、所望信号 $s(m, n)$ についても同様に平均零の定常過程信号と仮定する。このとき、出力の平均値も零にする必要があることから、バイアス項は式(2)より次式のように決定される。

$$h_{0,0} = - \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} b(i, j, k, l) r_x(i-k, j-l) \quad (3)$$

ただし、

$$r_x(i, j) = E[x(m, n)x(m-i, n-j)]$$

上式において、記号 $E[\cdot]$ は期待値演算子を表し、また、 $r_x(i, j)$ は $x(m, n)$ の自己相関関数を表している。このとき、式(3)を式(2)に代入し、行列形式で表現すると次式となる。

$$\begin{aligned} y(m, n) = & \mathbf{A}^T \mathbf{x}(m, n) \\ & + \text{tr}\{\mathbf{B}(\mathbf{x}(m, n)\mathbf{x}^T(m, n) - \mathbf{R}_x)\} \end{aligned} \quad (4)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(m, n) = & [x^T(0), \dots, x^T(N-1)]^T \\ \mathbf{A} = & [\mathbf{A}^T(0), \dots, \mathbf{A}^T(N-1)]^T \\ \mathbf{B} = & \begin{bmatrix} \mathbf{B}(0,0) & \cdots & \mathbf{B}(0,N-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}(N-1,0) & \cdots & \mathbf{B}(N-1,N-1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 & \cdots & \mathbf{R}_{N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{N-1} & \cdots & \mathbf{R}_0 \end{bmatrix}$$

ここに、

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(i) = & [x(m-i, n), \dots, x(m-i, n-N+1)]^T \\ \mathbf{A}(i) = & [a(i, 0), \dots, a(i, N-1)]^T \\ \mathbf{B}(i, j) = & \begin{bmatrix} b(i, 0, j, 0) & \cdots & b(i, 0, j, N-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b(i, N-1, j, 0) & \cdots & b(i, N-1, j, N-1) \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_i = & \begin{bmatrix} r_x(i, 0) & \cdots & r_x(i, N-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(i, N-1) & \cdots & r_x(i, 0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

上式において、記号 $\text{tr}[\cdot]$ は行列のトレース演算子を表し、また、 \mathbf{R}_x はブロックテプリッツ行列を表す。このとき、所望信号と入力信号との間の相互相関ベクトルおよび相互バイ相関行列を以下のように定義する。

$$\mathbf{R}_{sx} = E[s(m, n)\mathbf{x}(m, n)] \quad (5)$$

$$\mathbf{T}_{sx} = E[s(m, n)\mathbf{x}(m, n)\mathbf{x}^T(m, n)] \quad (6)$$

ただし、

$$\begin{aligned} r_{sx}(i, j) = & E[s(m, n)x(m-i, n-j)] \\ t_{sx}(i, j, k, l) = & E[s(m, n)x(m-i, n-j) \\ & \times x(m-k, n-l)] \end{aligned}$$

上式において、 \mathbf{R}_{sx} は N^2 次元のベクトルであり、また、 \mathbf{T}_{sx} は $N^2 \times N^2$ 次元の行列で、その要素に関して $t_{sx}(i, j, k, l) = t_{sx}(k, l, i, j)$ の関係が成立する。

次に、所望信号とフィルタ出力との差の平均2乗誤差を次式で定義する。

$$\xi = E\{e(m, n)^2\} \quad (7)$$

ただし、 $e(m, n) = s(m, n) - y(m, n)$ である。このとき、式(7)を最小にする最適なフィルタ係数は、次式で示す直交原理^[4]に基づき得られた関係

$$E[e(m, n)\mathbf{x}(m, n)] = \mathbf{0}_{N^2 \times 1} \quad (8)$$

$$E[e(m, n)\{\mathbf{x}(m, n)\mathbf{x}^T(m, n) - \mathbf{R}_x\}] = \mathbf{0}_{N^2 \times N^2} \quad (9)$$

を用いることにより、以下のように得られる。

$$\begin{aligned} E[s(m, n)\mathbf{x}(m, n)] & \\ = E[\mathbf{x}(m, n)\mathbf{A}^T \mathbf{x}(m, n) + \mathbf{x}(m, n) & \\ \times \text{tr}\{\mathbf{B}(\mathbf{x}(m, n)\mathbf{x}^T(m, n) - \mathbf{R}_x)\}] & \quad (10) \\ E[s(m, n)\mathbf{x}(m, n)\mathbf{x}^T(m, n)] & \\ = E[\mathbf{x}(m, n)\mathbf{x}^T(m, n)\mathbf{A}^T \mathbf{x}(m, n) & \\ + \mathbf{x}(m, n)\mathbf{x}^T(m, n) & \\ \times \text{tr}\{\mathbf{B}(\mathbf{x}(m, n)\mathbf{x}^T(m, n) - \mathbf{R}_x)\}] & \quad (11) \end{aligned}$$

従って、上式を \mathbf{A} および \mathbf{B} に関して解けば、最適なフィルタ係数が得られる。一方、入力信号をガウス過程と仮定

すると次の関係式が得られる。

$$E[\mathbf{x}(m, n)\mathbf{A}^T\mathbf{x}(m, n)] = \mathbf{R}_x\mathbf{A} \quad (12)$$

$$E[\mathbf{x}(m, n)\text{tr}\{\mathbf{B}(\mathbf{x}(m, n)\mathbf{x}^T(m, n) - \mathbf{R}_x)\}] = \mathbf{0}_{N^2 \times 1} \quad (13)$$

$$E[\mathbf{x}(m, n)\mathbf{x}^T(m, n)\mathbf{A}^T\mathbf{x}(m, n)] = \mathbf{0}_{N^2 \times N^2} \quad (14)$$

更に、行列 \mathbf{B} が対称行列であり、また、平均零の結合ガウス過程信号である x_1, x_2, x_3 および x_4 に対して、

$$E[x_1x_2x_3x_4] = E[x_1x_2]E[x_3x_4] + E[x_1x_3]E[x_2x_4] + E[x_1x_4]E[x_2x_3] \quad (15)$$

の関係が成立することから次式が得られる。

$$E[\mathbf{x}(m, n)\mathbf{x}^T(m, n)\text{tr}\{\mathbf{B}(\mathbf{x}(m, n)\mathbf{x}^T(m, n) - \mathbf{R}_x)\}] = 2\mathbf{R}_x\mathbf{B}\mathbf{R}_x \quad (16)$$

従って、最適なフィルタ係数 \mathbf{A} および \mathbf{B} は式 (10) および式 (11) に上記の関係を代入することにより

$$\mathbf{R}_{s,x} = \mathbf{R}_x\mathbf{A} \quad (17)$$

$$\mathbf{T}_{s,x} = 2\mathbf{R}_x\mathbf{B}\mathbf{R}_x \quad (18)$$

のように各々独立に決定され、更に式 (17) に関しては \mathbf{R}_x^{-1} を左辺から乗じることにより、また、式 (18) に関しては \mathbf{R}_x^{-1} を左辺および右辺からそれぞれ乗じることにより次式のように決定される。

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_x^{-1}\mathbf{R}_{s,x} \quad (19)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}\mathbf{R}_x^{-1}\mathbf{T}_{s,x}\mathbf{R}_x^{-1} \quad (20)$$

このとき、最小2乗平均誤差 ξ_{opt} は次式に示す関係式

$$E[s(m, n)\text{tr}\{\mathbf{B}(\mathbf{x}(m, n)\mathbf{x}^T(m, n) - \mathbf{R}_x)\}] = \text{tr}(\mathbf{B}\mathbf{T}_{s,x}) \quad (21)$$

$$E[|\text{tr}\{\mathbf{B}(\mathbf{x}(m, n)\mathbf{x}^T(m, n) - \mathbf{R}_x)\}|^2] = 2\text{tr}(\mathbf{B}\mathbf{R}_x\mathbf{B}\mathbf{R}_x) \quad (22)$$

を用いることにより以下のようになる。

$$\xi_{opt} = r_s(0, 0) - \mathbf{R}_{s,x}^T\mathbf{R}_x^{-1}\mathbf{R}_{s,x} - \frac{1}{2}\text{tr}(\mathbf{R}_x^{-1}\mathbf{T}_{s,x}\mathbf{R}_x^{-1}\mathbf{T}_{s,x}) \quad (23)$$

ただし、 $r_s(0, 0) = E\{[s(m, n)]^2\}$ である。

以上より、QP モデルのマスクをもつ2次元ボルテラフィルタの1次および2次の最適なボルテラ核の導出は、入力信号 $x(m, n)$ の自己相関行列 \mathbf{R}_x がブロックテプリッツ行列になることを除けば、1次元信号を対象とした1次元ボルテラフィルタの導出と同様に行なうことができる。

3. 適応アルゴリズム

2次元ボルテラフィルタが未知の環境で動作する場合に、フィルタ係数の適応を行なうLMSアルゴリズムを導出する。式(4)に基づき空間領域 (m, n) における2次元ボルテラフィルタの入出力関係を次式で定義する。

$$y(m, n) = \mathbf{A}^T(m, n)\mathbf{x}(m, n) + \text{tr}\{\mathbf{B}(m, n)(\mathbf{x}(m, n)\mathbf{x}^T(m, n) - \mathbf{R}_x)\} \quad (24)$$

次に、式(24)を式(7)に代入し、 ξ を1次のフィルタ係数 $\mathbf{A}(m, n)$ で偏微分し勾配を求める。このとき、LMSアルゴリズム [5] により $\mathbf{A}(m, n)$ の係数更新再帰式は、得られた勾配の瞬時勾配を用いて次式となる。

$$\mathbf{A}(m, n+1) = \mathbf{A}(m, n) + \mu_A e(m, n)\mathbf{x}(m, n) \quad (25)$$

ただし、 $\mathbf{A}(m+1, 1) = \mathbf{A}(m, N_2)$ とする。なお、 N_2 は n 軸方向の最大データ領域サイズである。また、 μ_A はステップサイズパラメータと呼ばれている正数である。適応アルゴリズムの安定性や収束の速さを制御する $0 < \mu_A < \lambda_{max}^{-1}$ の範囲の値であり、 λ_{max} は入力信号の自己相関行列 \mathbf{R}_x の最大固有値を表す。同様に、2次のフィルタ係数 $\mathbf{B}(m, n)$ の係数更新再帰式は次式となる。

$$\mathbf{B}(m, n+1) = \mathbf{B}(m, n) + \mu_B e(m, n) \times \{\mathbf{x}(m, n)\mathbf{x}^T(m, n) - \mathbf{R}_x\} \quad (26)$$

ただし、 $\mathbf{B}(m+1, 1) = \mathbf{B}(m, N_2)$ とする。なお、 μ_B は $0 < \mu_B < \lambda_{max}^{-2}$ の範囲の値である。

以上より、QP モデルのマスクをもつ2次元ボルテラフィルタの、1次および2次の最適なボルテラ核導出の適応アルゴリズムが得られた。

4. 数値計算

先に提案した手法の有効性を検証するために、次式で示す1次および2次のボルテラ核を有する、フィルタ次数が3次からなる2次元ボルテラフィルタを考える。

$$y(m, n) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 a(i, j)x(m-i, n-j) + \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \sum_{k=0}^2 \sum_{l=0}^2 b(i, j, k, l)[x(m-i, n-j) \times x(m-k, n-l) - r_x(i-k, j-l)] \quad (27)$$

上式において、入力信号としては平均0、分散1の2次元ガウス過程信号を仮定し、また、対象とするデータ領域としては 500×500 のサイズを有する2次元データを用いる。まず、入力信号の自己相関行列 \mathbf{R}_x および入力信号と所望信号間との相互相関ベクトル $\mathbf{R}_{s,x}$ と相互バイ相関行列 $\mathbf{T}_{s,x}$ を 500×500 の2次元データより計算する。次に、式(19)および式(20)に代入することにより最適な1次および2次のボルテラ核 \mathbf{A} および \mathbf{B} を求める。なお、上記により導出した \mathbf{A} および \mathbf{B} の有効性を定量的に評価するために、次式の $IRER$ を定義する。

$$IRER = 10 \log_{10} \left[\frac{\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \{a(i, j) - \hat{a}(i, j)\}^2}{\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \{a(i, j)\}^2} + \frac{\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \sum_{k=0}^2 \sum_{l=0}^2 \{b(i, j, k, l) - \hat{b}(i, j, k, l)\}^2}{\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \sum_{k=0}^2 \sum_{l=0}^2 \{b(i, j, k, l)\}^2} \right] \quad (28)$$

ただし、 $a(i, j), b(i, j, k, l)$ および $\hat{a}(i, j), \hat{b}(i, j, k, l)$ は、それぞれ1次および2次のボルテラ核の要素の真値およ

び計算値である。このとき、本例により求めた $IRER$ は $-29.756778[\text{dB}]$ となる。式 (23) の最小 2 乗平均誤差 ξ_{opt} を計算すると 1.763828 となり、また、参考のために同一次元からなる線形フィルタによる最小 2 乗平均誤差を求めると 7.571796 となる。以上のことから、本例に対して 2 次のボルテラ核を考慮することの有効性が明らかとなる。

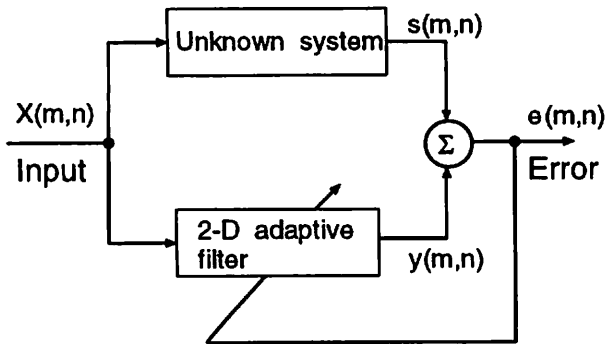


図2 システム同定図

次に、LMS 適応アルゴリズムの有効性を検証するために、図2に示す未知システムの同定問題を取り扱う。なお、入力信号としては先の数値計算と同様に平均0、分散1の2次元ガウス過程信号と仮定し、データ領域としては 50×50 のサイズからなる2次元データを用いた。また、適応アルゴリズムにおけるステップサイズパラメータ μ_A および μ_B としてはそれぞれ 0.0037 および 0.00022 を用いた。これらの値は、適応フィルタの安定性が保証されている $0 < \mu_A < \lambda_{max}^{-1}$ および $0 < \mu_B < \lambda_{max}^{-2}$ の範囲で最も良好な収束特性を与える値を試行錯誤を重ねて決定したものである。なお、比較のために1次のボルテラ核 A のみからなる、2次元線形フィルタに基づいたLMS適応アルゴリズムによるシステム同定を行なった。適応アルゴリズム中のステップサイズパラメータ μ_A としては、先の決定と同様に $0 < \mu_A < \lambda_{max}^{-1}$ の範囲で最も良好な収束特性を与える 0.0001 を用いた。なお、それぞれのフィルタの収束特性を定量的に評価するための一指標として、次式で定義した MSE_k を用いる。

$$MSE_k = \frac{E\{[e(m,n)]^2\}}{E\{[s(m,n)]^2\}} \quad (29)$$

図3には、繰り返し回数 $k = (m-1) \times N_2 + n$ に対する MSE_k を示している。ここで、 MSE_k としては100回の独立した試行に対する平均値を用いている。なお、図中の Linear model は2次元線形フィルタによる MSE_k であり、また、Quadratic model は2次元ボルテラフィルタによる MSE_k である。同図から明らかなように、Linear model では MSE_k が 0.9 付近の値でいつまでも収束しないが、Quadratic model では繰り返し回数が 2000 回程度で MSE_k が殆んど零に収束している。

以上のシミュレーションから明らかなように、本例に対して2次のボルテラ核を考慮した2次元ボルテラフィルタを用いることの有効性が分かる。

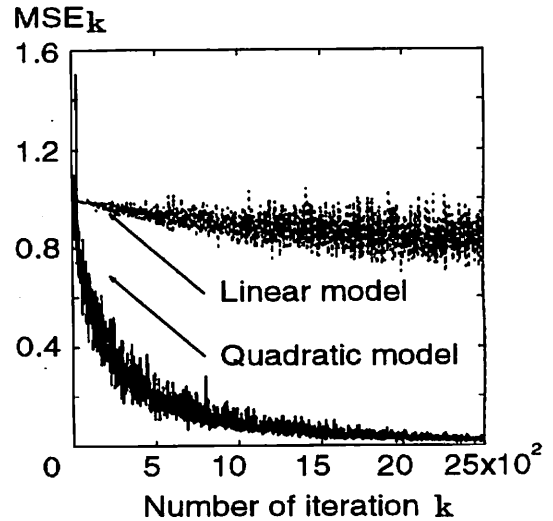


図3 シミュレーション結果

5. むすび

本論文では、マスク領域としてQPモデルを用いた最適な2次元ボルテラフィルタを、2次元ガウス過程信号に基づいて導出すると共に、LMSによる2次元適応アルゴリズムを導出した。なお、1次および2次のボルテラ核をもつ2次元ボルテラフィルタの同定問題に本手法を応用し、計算機シミュレーションを行なうと共に、2次元線形フィルタを用いた際の MSE との比較を行ない、同手法の有効性を明らかにした。

謝辞

本研究を遂行するにあたり有益な御助言を頂いた慶應義塾大学理工学部システムデザイン工学科浜田望教授に深謝する。本研究の一部は財団法人テレコム先端技術研究支援センター助成金によった。

文献

- [1] 市川 哲: “ボルテラ級数による非線形システムの解析”, システム / 制御 / 情報, Vol.34, No.9, pp.524-530, 1990.
- [2] T. Koh and E.J. Powers: “Second-Order Volterra Filtering and Its Application to Nonlinear System Identification”, IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. ASSP-33, NO. 6, pp.1445-1455, 1985.
- [3] D.E. Dudgeon and R.M. Mersereau: “Multidimensional Digital Signal Processing”, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1984.
- [4] S. Haykin: “Adaptive Filter Theory”, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 3rd ed., 1996.
- [5] B. Widrow and S.D. Stearns: “Adaptive Signal Processing”, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1985.