



Title	ハイブリッドストレスモデルによる弾塑性解析法
Author(s)	伊良波, 繁雄
Citation	琉球大学工学部紀要(35): 35-48
Issue Date	1988-03
URL	http://hdl.handle.net/20.500.12000/17653
Rights	

ハイブリッドストレスモデルによる弾塑性解析法**

伊良波 繁 雄*

Elasto-Plastic Analysis Using Hybrid Stress Model

Shigeo IRAHA

Synopsis

In this paper, a elastic-plastic analysis of Two-Dimensional structures based on hybrid stress model is presented. When yielding occur in the element, The stress field satisfies the plastic condition in the element therfor the plastic condition equations is introduced into the principle of hybrid complementary energy using lagrange multipliers defined on the yielded checking point in the element. The elastic-plastic stiffness matrix can be derived throug stationaly conditions of the principle of hybrid complementary energy. For numerical examles, the hybrid stress model is applied for the elasto-plastic analysis of the thick cylinder internal pressure, V-notch specimen under tensile load, the bearing capacity of foundation under footing and perforated plate under tensile load. The results of numerical examples are in good agreement with the ones of limit analysis and other methods.

Key Words: Hybrid Stress Model, Finite Element Model.

1. まえがき

要素境界に塑性変形を集中させて弾塑性解析を行う方法の1つとして川井の開発した剛体バネモデルがある。剛体バネモデルは極限解析法としては良い方法であるが、一次元要素といくつかの要素以外は崩壊に到達する以前の情報に関しては信頼性が不足している。このために、渡辺・川井はこの欠点を解決するための要素モデルとしてハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理を用いて一連のハイブリッドストレスモデル²⁾を提案している。二次元ハイブリッドストレスモデルは図-1に示すように、辺中央に自由度があり、要素境界で引張破壊やすべ

り破壊(図-3)を表わすのが容易である。

しかし、この二次元ハイブリッドストレスモデルは筆者の数値計算例によると、要素内の応

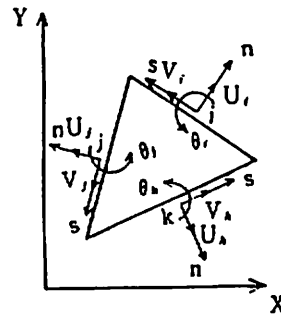


図-1 二次元ハイブリッドストレスモデル

受付: 1987年10月31日

* 琉球大学工学部土木工学科

Dept. of Civil Engineering, Fac. of Eng.

** 本論文の内容の一部については応用力学連合講演会(第37回, 1987年)において発表。

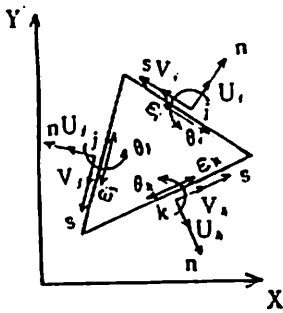


図-2 新しい二次元ハイブリッドストレスモデル

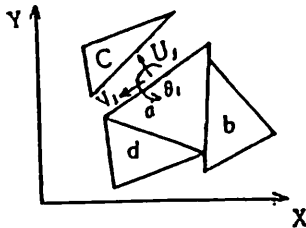


図-3 引張破壊およびすべり破壊の生じている要素

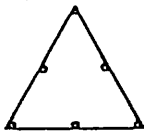


図-4 塑性の評価点

力や要素境界の変位の精度は良くない事が分っている。筆者はこの点を改善する方法として、図-2に示すように、辺中央に4個の自由度(U, V, θ, ϵ_i)を持つ三角形要素を示した^{3),4)}。この要素は要素内の応力および要素境界の変位の精度が良く、さらに、剛体パネモデルや渡辺・川井の二次元ハイブリッドストレスモデルと同様に、極限解析を行うのに便利である。

要素境界で塑性を表わす解析手法では要素分割によって得られる解の精度がかなり違う。このために、要素分割のパターンを変えて試行錯誤で計算を行った後で最良の解を得ることが多い。このようにして得られた最良の解も理論解や実験結果等の比較すべきものがない場合には、解の精度について、どのように判断すべきか困難な問題となる。この点については、他の解析

手法を用いた場合でも同じ事である。このような問題に対しては、別の解析手法で同じ問題を解き、比較することも一つの方法である。図-2の二次元ハイブリッドストレスモデルは要素境界で塑性を表わし極限解析を行うために開発された要素であるが、もし要素内で塑性を表わした時でも精度の良い解を得ることができるなら、この二つの手法で解析した結果を比較することで、解の精度が良好かどうかの判断材料にもなりうる。また、数値計算には同一の入力データを用いることができるという利点もある。

このために、本報告では図-2に示すハイブリッドストレスモデルを用いて、要素内だけで塑性を考慮する方法について検討を行った。ハイブリッドストレスモデルで塑性を取り扱う方法は、前報^{3),4)}では要素境界で塑性条件式を満足させるために、ラグランジェの未定乗数法を用いたが、今回もラグランジェの未定乗数法を用いて塑性条件式をハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理に導入する方法を用いている。塑性条件式をラグランジェの未定乗数法で変分原理に導入する方法は、多くの研究で用いられている。C. Nyssen と P. Beckers⁵⁾は Reissner の変分原理を用いて弾塑性解析を行う時に用いている。また、近藤⁶⁾は骨組構造の極限解析を行う時に用い、渡辺⁷⁾も図-1に示す二次元ハイブリッドストレスモデルを用いて完全弾塑性体の弾塑性解析例を示した。この時、渡辺は図-4に示すように、要素内に6点の塑性評価点を設定し、塑性評価点が降伏条件に達すると、それ以後はその点が塑性条件式を満足するようにラグランジェの未定乗数法を用いている。本報告では図-2の要素を用い、完全弾塑性体およびひずみ硬化を示す塑性体の解析法について述べている。塑性の評価点は渡辺と同様に要素内に設定された評価点のみで塑性条件式を満足するような方法を用いている。なお、このように要素内の任意の点のみで塑性条件式を満足させるという考え方は、近年、上田ら⁸⁾によって精力的に研究されている塑性選点法と同じである。

2. 解析手法

2-1 ハイブリッド型コンプリメンタリエ

エネルギーの原理について

ハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理⁹⁾は

$$\Pi_{CH} = \Sigma \left\{ \int \int_{V_n} B(\sigma_{ij}) dx dy - \int_{\partial V_n} u_i T_i ds + \int_{S\sigma_n} u_i \bar{T}_i ds \right\} \quad (1)$$

で与えられる。ここで $B(\sigma_{ij})$: コンプリメンタリエネルギー, u_i : 変位, V_n : 要素の体積, ∂V_n : 要素の境界, $S\sigma_n$: 力学的境界, σ_{ij} : 応力, $T_i = \sigma_{ij} n_j$, n_j 方向余弦, \bar{T}_i : 外力, Σ : 要素全部の和を意味する。図-1に示すように全体座標系を x, y 軸とし, 局所座標系 n, s を要素境界ごとに仮定すれば変位, 応力について, それぞれ次式が成立する。

$$u_x = \ell U - m V, \quad u_y = m U + \ell V \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \ell^2 + 2\tau_{xy} \ell m + \sigma_y m^2 \\ \sigma_s &= \sigma_x m^2 + \sigma_y \ell^2 - 2\tau_{xy} \ell m \\ \tau_{ns} &= -(\sigma_x - \sigma_y) \ell m + \tau_{xy} (\ell^2 - m^2) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで, ℓ, m は方向余弦, u_x, u_y はそれぞれ x, y 方向の変位である。 U, V はそれぞれ要素境界の n 方向, s 方向の変位を示す。式(2), (3)を用いて, 式(1)の右辺第2項の積分を変換すると

$$\int_{\partial V_n} u_i T_i ds = \int_{\partial V_n} [(\ell U - m V)(\sigma_x \ell + \tau_{xy} m) + (m U + \ell V)(\tau_{xy} \ell + \sigma_y m)] ds = \int_{\partial V_n} (U \sigma_n + V \tau_{ns}) ds \quad (4)$$

となる。式(1)の右辺第3項についても同様に計算できるので, 式(1)は次式ようになる。

$$\Pi_{CH} = \Sigma \left[\int \int_{V_n} B(\sigma_{ij}) dx dy - \int_{\partial V_n} (U \sigma_n + V \tau_{ns}) ds + \int_{S\sigma_n} (U \bar{\sigma}_n + V \bar{\tau}_{ns}) ds \right] \quad (5)$$

2-2 変分原理への塑性条件式の導入

塑性条件式 f が要素内の応力のみ関数の時, 二次元問題では一般に次のように表わされる。

$$f = Y(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) - \sigma_y = 0 \quad (6)$$

ここで, Y は降伏関数, σ_y は降伏応力である。

要素内の任意の点が降伏条件を満足し, 荷重の増加後も塑性状態を維持しているなら, 次の条件式を満たさねばならない。

$$df = \frac{\partial Y}{\partial \sigma_x} d\sigma_x + \frac{\partial Y}{\partial \sigma_y} d\sigma_y + \frac{\partial Y}{\partial \tau_{xy}} d\tau_{xy} = 0 \quad (7)$$

ここで, 式(7)を満足させるために, ラグランジェの未定乗数 $d\lambda$ を用いて式(5)に導入する。

$$\Pi_{CH}^* = \Pi_{CH} + \int_{V_p} d\lambda df dA \quad (8)$$

ここで, V_p は塑性に達した領域。また, 式(7)を要素内の任意の点のみで塑性条件式を満足させるためには

$$\Pi_{CH}^* = \Pi_{CH} + \sum_{i=1}^N d\lambda_i df_i \quad (9)$$

となる。式(9)で N は要素内で塑性に達した評価点の数である。つぎに, ひずみ硬化を考慮する方法について説明する。等方硬化の塑性条件式は一般に次のように表わされる。

$$f = Y(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) - \sigma_0(\bar{\epsilon}^p) = 0 \quad (10)$$

ここで, σ_0 は降伏曲面の大きさを表わすパラメータであり, 初期の降伏時には σ_y に一致する。 $\bar{\epsilon}^p$ は相当塑性ひずみである。要素内の点が降伏条件を満足し, 荷重の増加後も塑性状態を維持しているなら, 次の条件式を満たさねばならない。

$$df = \frac{\partial Y}{\partial \sigma_x} d\sigma_x + \frac{\partial Y}{\partial \sigma_y} d\sigma_y + \frac{\partial Y}{\partial \tau_{xy}} d\tau_{xy} - H' d\bar{\epsilon}^p = 0 \quad (11a)$$

ここで, H' はひずみ硬化係数であり, $d\sigma_0/d\bar{\epsilon}^p = H'$ である。要素内の降伏した点で式(11a)を満足させるために, ラグランジェの未定乗数 $d\lambda$ を用いる。H. Eggers¹⁰⁾によれば式(8)のラグランジェの未定乗数の物理的意味は相当塑性ひずみ増分 $d\bar{\epsilon}^p$ であるので式(11a)は次のようになる。

$$df = \frac{\partial Y}{\partial \sigma_x} d\sigma_x + \frac{\partial Y}{\partial \sigma_y} d\sigma_y + \frac{\partial Y}{\partial \tau_{xy}} d\tau_{xy} - H' d\lambda = 0 \quad (11b)$$

式(11b)をラグランジェの未定乗数 $d\lambda$ を用いて, 式(5)に導入する。この時, $d\lambda$ で変分を行った時に式(11b)に一致させることを考慮に入れれば

$$\Pi_{CH}^* = \Pi_{CH} + \int_{V_p} d\lambda \left(\frac{\partial Y}{\partial \sigma_x} d\sigma_x + \frac{\partial Y}{\partial \sigma_y} d\sigma_y + \frac{\partial Y}{\partial \tau_{xy}} d\tau_{xy} - \frac{H'}{2} d\lambda \right) dA \quad (12a)$$

となる。なお、塑性仕事の増分は

$$dW^p = \sigma_0 d\bar{\epsilon}^p$$

であるから、

$$\left. \begin{aligned} d\bar{\epsilon}^p = d\lambda > 0 \text{ のとき} & \text{ 負荷} \\ d\bar{\epsilon}^p = d\lambda < 0 \text{ のとき} & \text{ 除荷} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

となる。

2-3 弾塑性剛性方程式の誘導

弾塑性剛性方程式を導くために、応力場、変位場、ラグランジェの未定乗数を仮定する必要があるが、まず、応力場と変位場を次式のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \beta_1 + y\beta_2 + x\beta_3 + y^2\beta_4 + x^2\beta_{10} + 2xy\beta_{11} \\ \sigma_y &= \beta_2 + x\beta_3 + y\beta_4 + x^2\beta_5 + y^2\beta_{10} + 2xy\beta_{12} \\ \tau_{xy} &= \beta_3 - y\beta_4 - x\beta_5 - 2xy\beta_{10} - y^2\beta_{11} - x^2\beta_{12} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$U = u_i - \theta_i s, \quad V = v_i - \epsilon_i s \quad (15)$$

式(15)で u_i, v_i, θ_i は図-2に示すように節点 i の変位であるが、 ϵ_i は i 点の要素境界に平行な方向のひずみを意味している。なお、 s は図-2に示すように、局所座標系の原点からの距離である。つぎに、式(14)を式(10)のように表わし、ひずみ・応力関係式を式(17)のように仮定する。

$$\{\sigma\} = [B] \{\beta\} \quad (16)$$

$$\{\epsilon\} = [C] \{\sigma\} \quad (17)$$

式(16), (17)を用いれば、式(5)の右辺第1項の積分は次式のようになる。

$$\iint_{V_n} B(\sigma_{ij}) dx dy = \{\beta\}^T [H] \{\beta\} / 2 \quad (18)$$

ここで、 $[H] = \iint_{V_n} [B]^T [C] [B] dx dy$, $\{\beta\} = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{12}\}^T$ である。式(5)の右辺第2項は式(3), (4), (15)を用いれば

$$\int_{\partial V_n} (U\sigma_n + V\tau_{ns}) ds = \{\beta\}^T [G] \{u\} \quad (19)$$

となる。ここで、 $\{u\} = \{u_i, v_i, \theta, \epsilon_i, \dots, \epsilon_k\}^T$ である。外力ベクトルを $\{\bar{F}\}$ とすると式(5)の荷重項は

$$\int_{\partial V_n} (U\bar{\sigma}_n + V\bar{\tau}_{ns}) ds = \{u\}^T \{\bar{F}\} \quad (20)$$

となる。

塑性を考慮に入れた変分原理として、式(8), (9), (12a)を示したが、式(8)は式(12a)で $H' = 0$ とする場合に一致するので、弾塑性剛性方程式の誘導方法は式(9)と(12a)について説明する。式(9)は完全弾塑性体の変分原理である。式(9)の Π_{CH} については、すでに式(18), (19), (20)から求められるので右辺第2項について示せば、式(7)と式(10)より

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N d\lambda_i df_i \\ &= \sum_{i=1}^N [(d\sigma_x d\sigma_y d\tau_{xy}) \left(\frac{\partial Y}{\partial \sigma_x} \frac{\partial Y}{\partial \sigma_y} \frac{\partial Y}{\partial \tau_{xy}} \right)^T d\lambda_i] \Bigg|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} \\ &= \{d\beta\}^T [G^*] \{d\lambda\} \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、 $[G^*]$ の j 行 k 列を $G^*(j, k)$ とすると、次式のようになる。

$$\begin{aligned} G^*(j, k) &= [B(1, j) \frac{\partial Y}{\partial \sigma_x} + B(2, j) \frac{\partial Y}{\partial \sigma_y} \\ & \quad + B(3, j) \frac{\partial Y}{\partial \tau_{xy}}] \Bigg|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} \end{aligned} \quad (22)$$

ここで $\{d\lambda\} = \{d\lambda_1, d\lambda_2, \dots, d\lambda_n\}$ である。式(22)で要素内の塑性点の数が1個であれば $k = 1$, $i = 1$ である。このときの $[G^*]$ の大きさは 13×1 である。塑性点の数が n 個の時は k は $1 \sim n$, $i = 1 \sim n$ となり $[G^*]$ の大きさは $13 \times n$ となる。このように、塑性点の1個が $[G^*]$ の1列に対応しているので、 $k = i$ とおくことができる。つぎに、式(18), (19), (20), (21)を式(9)に代入する。このとき、独立変数である $\{\beta\}$, $\{u\}$, $\{\lambda\}$ はすべて増分記号が付くが、簡単のために、増分記号を省略して示す。

$$\begin{aligned} \Pi_{CH} &= \{\beta\}^T [H] \{\beta\} / 2 - \{\beta\}^T [G] \{u\} \\ & \quad + \{u\}^T \{\bar{F}\} + \{\beta\}^T [G^*] \{\lambda\} \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、 $\{\beta\}$ についての停留条件より

$$\{\beta\} = [H]^{-1} \{[G] \{u\} - [G^*] \{\lambda\}\} \quad (24)$$

となる。式(24)を式(23)に代入し、 $\{u\}$ と $\{\lambda\}$ について停留条件を求め、さらに $\{\lambda\}$ を消去すれば次式が得られる。

$$[[k_{11}] - [k_{12}] [k_{22}]^{-1} [k_{21}]] \{u\} = \{\bar{F}\} \quad (25)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} [k_{11}] &= [G]^T [H]^{-1} [G], \\ [k_{12}] &= [G]^T [H]^{-1} [G^*] \\ [k_{22}] &= [G^*]^T [H]^{-1} [G], \\ [k_{22}] &= [G^*]^T [H]^{-1} [G^*] \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

である。式(25)が完全弾塑性体の弾塑性剛性方程式である。

式(25)の弾塑性剛性方程式は $[H]$, $[k_{22}]$ の逆行列を含む, かなりの計算量となっている。このために, より単純で計算量の少ない弾塑性剛性マトリックスを導く方法を述べる。式(23)で $\{\beta\}$, $\{u\}$, $\{\lambda\}$ について停留条件を求めると, それぞれ次式のようになる。

$$\delta \{\beta\} : [H] \{\beta\} - [G] \{u\} + [G^*] \{\lambda\} = 0 \quad (27)$$

$$\delta \{u\} : - [G]^T \{\beta\} + \{\bar{F}\} = 0 \quad (28)$$

$$\delta \{\lambda\} : [G^*]^T \{\beta\} = 0 \quad (29a)$$

式(27), (28), (29a)を一つのマトリックスで表わせば次のようになる。

$$\begin{bmatrix} H & -G & G^* \\ -G^T & 0 & 0 \\ G^{*T} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta \\ U \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\bar{F} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (30)$$

この式は係数行列の対角項に零マトリックス: 0 があるために, 直接解くことは困難である。大地⁽¹¹⁾はこのような方程式を解くために 0 のかわりに, 微小な値 ϵ_1 を対角線上に並べた対角行列式 ϵ を用いる方法を示している。ここでは, 大地が示したように対角項に ϵ を仮定する方法を用いる。まず, ϵ を次のように仮定する。

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & & & & \\ & \epsilon_1 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & 0 & & & \cdot \\ & & & & & \epsilon_1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

このマトリックスの大きさは $N \times N$ である。式(30)の3行3列に $-\epsilon$ を仮定すれば, 式(29a)は次式のようになる。

$$[G^*]^T \{\beta\} - [\epsilon] \{\lambda\} = 0 \quad (29b)$$

これより $\{\lambda\}$ は次式のようになる。

$$\{\lambda\} = [\epsilon]^{-1} [G^*]^T \{\beta\} \quad (32)$$

式(32)を式(27)に代入し $\{\beta\}$ を求めると

$$\{\beta\} = [[H] + [G^*] [\epsilon]^{-1} [G^*]]^{-1} [G] \{u\} \quad (33)$$

式(33)を式(28)に代入すれば

$$[G]^T [[H] + [G^*] [\epsilon]^{-1} [G^*]]^{-1} [G] \{u\} = \{\bar{F}\} \quad (34)$$

となる。ここで $[\epsilon]$ は式(31)のように対角マトリックスを仮定しているので, 式(34)は次式のようになる。

$$[G]^T [[H] + \epsilon_1^{-1} [G^*] [G^*]^T]^{-1} [G] \{u\} = \{\bar{F}\} \quad (35)$$

式(25)と式(35)を比較すると, 明らかにより簡単になっていることが分かる。しかし, 式(35)は簡単になってはいるが, ϵ_1 の大きさをどの程度小さくするか, 問題点は残っている。 ϵ_1 は最初から微小な値を仮定するのも一つの方法であるが, $[H]$ と $[G^*][G^*]^T$ の係数の大きさを考慮して決めるのも一つの方法である。ここでは ϵ_1 を次式のように仮定する。

$$\epsilon_1^{-1} = (H_{max}/G_{max}^*) * 10^{-n} \quad (36)$$

ここで, H_{max} は $[H]$ の対角項の内, 最大の絶対値, G_{max}^* は $[G^*] [G^*]^T$ の対角項の内, 最大の絶対値, n は正の整数である。 n は数値計算を行い経験的に最適な値を決める必要がある。なお, 後で数値計算例として n を変化させた時の弾塑性解析例を行い n の最適値を示しておいた。

ひずみ硬化を考慮する場合は式12(a)を用いる。まず, 式12(a)を次式のように表わす。

$$\begin{aligned} \Pi_{ch} = \Pi_{cl} + \int_{V_p} d\lambda \left(\frac{\partial Y}{\partial \sigma_x} d\sigma_x + \frac{\partial Y}{\partial \sigma_y} d\sigma_y + \frac{\partial Y}{\partial \tau_{xy}} d\tau_{xy} \right) dA \\ - \frac{1}{2} \int_{V_p} H d\lambda^2 dA \end{aligned} \quad (12b)$$

式(12b)の右辺第2項, 第3項は塑性が生じた領

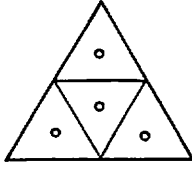


図-5 塑性の評価点

域での積分となっているが、ここでは図-5に示すように、1個の要素を辺中央を結ぶ線で4個の領域に分割し、降伏の判定は領域の重心で行う。また、塑性になった時、 $d\lambda$ はこの領域内で一定とする。このような仮定のもとで式(12b)の右辺第2項の積分は、

$$\begin{aligned} \int_{V_p} d\lambda \left(\frac{\partial Y}{\partial \sigma_x} d\sigma_x + \frac{\partial Y}{\partial \sigma_y} d\sigma_y + \frac{\partial Y}{\partial \tau_{xy}} d\tau_{xy} \right) dA \\ = \sum_{i=1}^n \int_{V_i} d\lambda_i \left(\frac{\partial Y}{\partial \sigma_x} d\sigma_x + \frac{\partial Y}{\partial \sigma_y} d\sigma_y + \frac{\partial Y}{\partial \tau_{xy}} d\tau_{xy} \right) dA \\ = \{d\beta\}^T [G^*] \{d\lambda\} \end{aligned} \quad (37)$$

となる。

ここで、 $[G^*]$ のj行k列を $G^*(j, k)$ とすると

$$\begin{aligned} G^*(j, k) = \int_{V_i} (B(1, j) \frac{\partial Y}{\partial \sigma_x} + B(2, j) \frac{\partial Y}{\partial \sigma_y} \\ + B(3, j) \frac{\partial Y}{\partial \tau_{xy}}) dA \end{aligned} \quad (38)$$

ここでも、式(22)と同様に、塑性点の1個が $[G^*]$ の1列に対応しているので、 $i = k$ とおける。

$[G^*]$ の大きさは、塑性点の数を n とすると $13 \times n$ となる。式(12b)の右辺第3項については、

$$\frac{1}{2} \int_{V_p} H' d\lambda^2 dA = \frac{1}{2} \{d\lambda\}^T [G^{**}] \{d\lambda\} \quad (39)$$

となる。ここで、 $[G^{**}]$ は次式に示す対角項のみ零でない係数をもつ対角マトリックスである。

$$[G^{**}] = \begin{bmatrix} H' A_1 & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ 0 & & & H' A_n \end{bmatrix} \quad (40)$$

この $[G^{**}]$ はマトリックスの大きさが $n \times n$ である。式(18), (19), (20), (37), (39)を式(12b)に代入する。このとき独立変数 $\{\beta\}$, $\{u\}$, $\{\lambda\}$ は増分記号が付くが、簡単のために、増分記号を省略して示す。

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{増分}} = \{\beta\}^T [H] \{\beta\} / 2 - \{\beta\}^T [G] \{u\} + \{u\}^T \{\bar{F}\} \\ + \{\beta\}^T [G^*] \{\lambda\} - \{\lambda\}^T [G^{**}] \{\lambda\} / 2 \end{aligned}$$

(41)

ここで、 $\{\beta\}$, $\{u\}$, $\{\lambda\}$ について停留条件を求めれば、

$$\delta \{\beta\} : [H] \{\beta\} - [G] \{u\} + [G^*] \{\lambda\} = 0 \quad (42)$$

$$\delta \{u\} : - [G]^T \{\beta\} + \{\bar{F}\} = 0 \quad (43)$$

$$\delta \{\lambda\} : [G^*]^T \{\beta\} - [G^{**}] \{\lambda\} = 0 \quad (44)$$

となる。式(44)より $\{\lambda\}$ を求めると

$$\{\lambda\} = [G^{**}]^{-1} [G^*]^T \{\beta\} \quad (45)$$

式(45)を式(42)に代入し $\{\beta\}$ を求めると

$$\{\beta\} = ([H] + [G^*] [G^{**}]^{-1} [G^*]^T)^{-1} [G] \{u\} \quad (46)$$

となる。式(46)を式(43)に代入すると弾塑性剛性方程式が得られる。

$$[G]^T ([H] + [G^*] [G^{**}]^{-1} [G^*]^T)^{-1} [G] \{u\} = \{\bar{F}\} \quad (47)$$

以上、完全弾塑性体の弾塑性剛性方程式として式(25), (35), ひずみ硬化を考慮した弾塑性剛性方程式として式(47)を示した。

完全弾塑性体の単純化した弾塑性剛性方程式として式(35)を示したが、この式とひずみ硬化を考慮した式(47)とは類似点がある。すなわち、式(29b)と式(44)を比較すると、 $[\varepsilon] = [G^{**}]$ であれば両者は一致する。このためには、図-5に示すように、要素の形状を正三角形とし、塑性評価点を含む各領域の面積を等しくする。つぎに、塑性の評価点を各領域の重心で行うこと、そして、 $\varepsilon_1 = H' A_1$, $A_1 = \text{三角形要素の面積} / 4$ とすることで両者は完全に一致する。連立一次方程式の係数行列の対角項に零マトリックスを含む場合の計算方法として、対角項に微小係数を仮定したが、この微小係数はひずみ硬化に関係していることが分かった。

3. 数値計算例

3-1 内圧を受ける厚肉円筒の弾塑性解析 解析は対称性を利用して円筒の中心角 $\theta = 10^\circ$

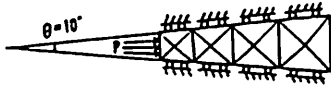


図-6 内圧を受ける厚肉円筒

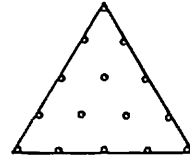


図-7 塑性の評価点

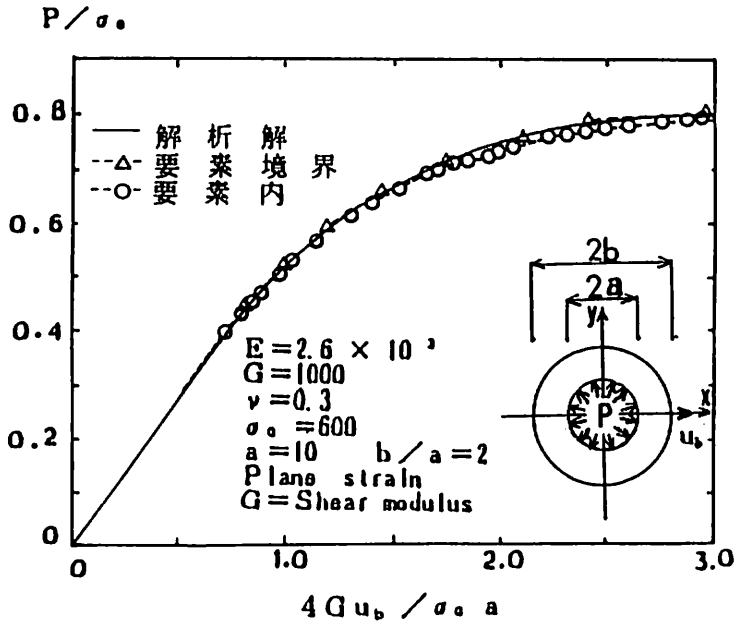
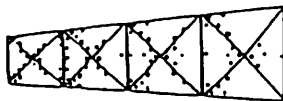
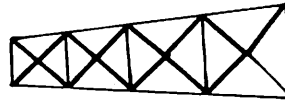


図-8 内圧を変位曲線



要素内



要素境界

図-9 最高荷重時の塑性点およびすべり線

の部分のみを用いている。この時の要素分割を図-6、塑性の評価点を図-7に示す。なお、要素分割は対数スパイラルになるように分割した。降伏条件式は Von Mises の式を仮定し平面ひずみ問題とする。この問題に対しては Hodge と White¹²⁾が理論解を求めているので、ハイブリッドストレスモデルで要素境界で塑性を表わ

す型と要素内で塑性を表わす型の2手法で解析し比較した。なお、弾塑性剛性方程式は完全弾塑性の式(25)を用いている。図-8は内圧と円筒外側点の円周に垂直方向の変位 u_b との関係を示してあるが、理論解析に良く一致している。図-9には最高荷重時 ($4Gu_b/\sigma_0 a \approx 3.0$) の塑性状態を示した。

3-2 Vノッチを有する平板の弾塑性解析

解析は平面応力問題とし、降伏条件式は Von Mises の式を仮定する。解析方法は要素境界で塑性を表わす方法と要素内で塑性を表わす方法の 2 手法を用いている。なお、弾塑性剛性方程式は式(25)を用いている。塑性の評価点は図-7 に示す点を用いた。材料の特性および要素分割は図-10 に示す。図-11 には荷重と変位の関係を示した。図-11 で弾性状態ではハイブリッドストレスモデルによる解と有限要素法による解がほとんど一致しているが、塑性域に達した後に違いが見られる。すなわち、ハイブリッドストレスモデルによる解が 2 手法とも極限解析解に大体一致しているのに対し、有限要素解¹³⁾は少し高目になっている。図-12 には最高荷重時の塑性状態を示してある。

単純化した弾塑性剛性方程式：式(35)を示したが、ここで、 n の値を変化させて弾塑性解析を行った結果を示す。解析モデルは図-10 に示す V ノッチ板を用いた。図-13 に n が 1, 2, 3 の時の荷重-変位関係を示してあるが、高目の

方から式(25)の弾塑性剛性方程式を用いた解に近づいて行く。 n が 4 以上の曲線は示していないが、 n が 4 を越えると $n = 3$ の曲線に大体一致している。表-1 には変位が 0.124mm の時の荷重と塑性状態の比較を示した。これより、 n が 5~12 の間であれば式(25)の弾塑性剛性方程式による結果と荷重も塑性状態も一致することが分かる。なお、 n が 16 以上だと解析不可能である。

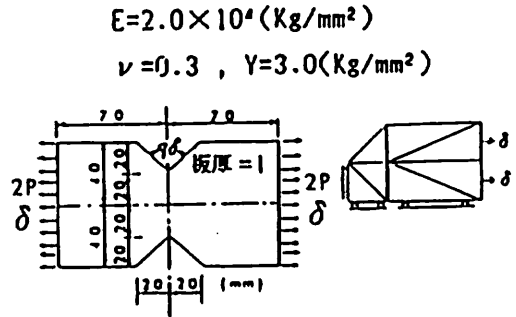


図-10 V ノッチ板の弾塑性解析

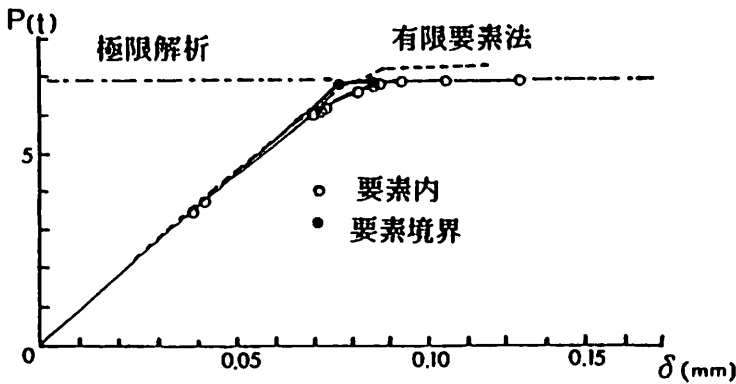


図-11 荷重-変位曲線

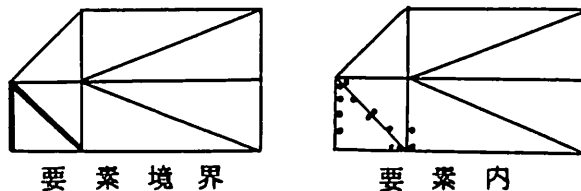


図-12 最高荷重時のすべり線と塑性点

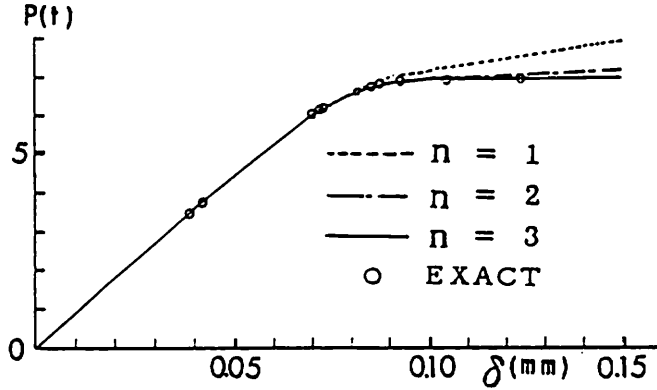


図-13 微小係数の大きさによる荷重-変位曲線の変化

表-1 ϵ_1 による塑性および荷重への影響

n	1	2	3	4	5	6	7	8
P	7.6547	7.2403	6.9389	6.9247	6.9299	6.9295	6.9295	6.9295
塑性	異	異	異	異	同じ	同じ	同じ	同じ
n	9	10	11	12	13	14	15	16
P	6.9295	6.9295	6.9295	6.9295	6.8963	6.9199	6.4864	計算不可
塑性	同じ	同じ	同じ	同じ	異	異	異	

(正解 $\delta=0.124\text{mm}$ の時 $P=6.9295$)

3-3 半無限地盤上の基礎の支持力

地盤工学への応用例として、半無限地盤上の基礎の支持力問題の解析例を示す。基礎は剛体と仮定し、基礎と地盤の間の摩擦はないとする。土の降伏関数は Drucker-Prager の降伏関数を仮定する。すなわち、平面ひずみ問題においては

$$f = 2\alpha \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + (1 - 3\alpha^2) \sqrt{J_2} = k \quad (48)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} J_2 &= \{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + \tau_{xy}^2\} / (1 - 3\alpha^2) \\ \alpha &= \tan\phi / \sqrt{9 + 12\tan^2\phi} \\ k &= 3C / \sqrt{9 + 12\tan^2\phi} \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

である。式(49)で、 C = 粘着力、 ϕ = 摩擦角である。

この解析では土の自重は無視している。なお、弾塑性剛性方程式としては式(25)を用いており、要素の評価点は図-14に示すように6点を用いている。図-15には要素の分割を示している。図-16には摩擦角 $\phi = 0^\circ$ の時の荷重と基礎の変位量の関係を示してある。この図より変位が1.0 cm付近から曲線の勾配が水平に近くなりプラントルの理論解 $P_0 = 10.283\text{ton}$ に近づいて行くこ

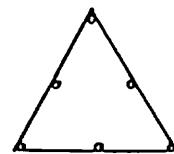


図-14 塑性の評価点

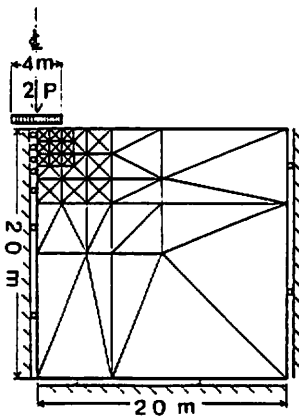


図-15 基礎の支持力問題

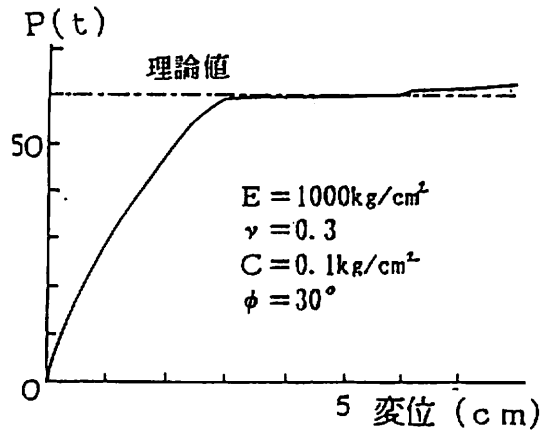


図-18 荷重と基礎の変位関係 ($\phi = 30^\circ$)

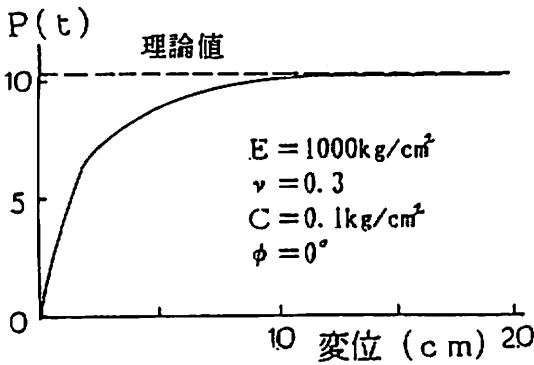


図-16 荷重と基礎の変位関係 ($\phi = 0^\circ$)

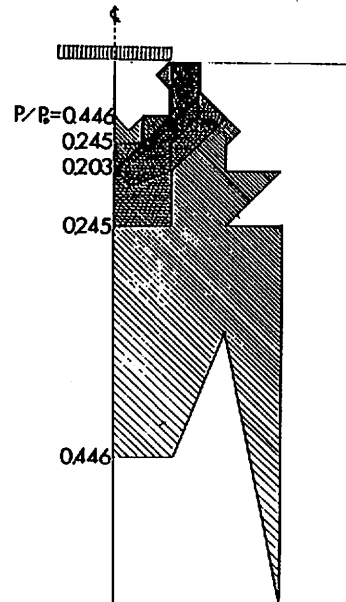


図-19 塑性域の拡大 ($\phi = 30^\circ$)

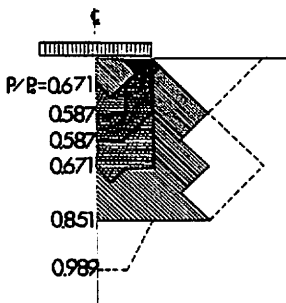


図-17 塑性域の拡大 ($\phi = 0^\circ$)

とがわかる。計算で得られた荷重は10.165tonであるからプラントルの解よりも1.1%程度低目となっている。図-17には、荷重段階ごとの塑性域の拡がりを示してあるが、領域は塑性に達した点を線で結んで示した。塑性域は最初に基礎端部に発生し、 $P/P_0 = 0.587$ の時には逆アーチ型の帯状の塑性域となり、荷重が増加するにつれて、帯状の塑性域は基礎底面および外部に向かって拡大して行く。このような、塑性域の拡がり

の性状は小林¹⁴⁾の有限要素法による解とも一致している。

つぎに、摩擦角 $\phi = 30^\circ$ の時の解析例を示す。荷重と基礎の変位の関係を図-18に示してある。変位が3.5cm~6.0cm付近までの曲線の勾配がほとんど水平になっており、この時の荷重を支持力と見なせば支持力は $P = 60.355 \text{ ton}$ であるのでプラントルの理論解 $P_0 = 60.279 \text{ ton}$ よりも0.13%高目となる。なお、変位量が6.0cmを超えると荷重も徐々に増加しているが、これは、数値計算上の誤差の蓄積が原因と思われる。つぎに、塑性域の拡がり状況を図-19に示した。塑性域は基礎端部から発生し、これが逆アーチ型の帯状 ($P/P_0 = 0.202$ の範囲) の塑性域を形成することは、 $\phi = 0^\circ$ と同じ傾向であるが、塑性域

の大きさは $P/P_0 = 0.446$ で解析領域の最も下側の要素まで達しており、摩擦角が大きくなるにつれて要素分割を細かくし、解析領域も広くすることが必要であると思われる。

3-4 平板の一軸引張弾塑性解析

ひずみ硬化を考慮した弾塑性剛性方程式として、式(47)を示したが、精度確認のため、平板の一軸引張解析を行った。図-20には荷重-変位、曲線を示したが弾性域および塑性域においてハイブリッドストレスモデルは棒理論解に一致していることが分かる。表-2には変位が 3.1×10^{-3} の時の荷重を理論値と比較した。これより、ハイブリッドストレスモデルが棒理論解に高精度で一致していることが分かる。

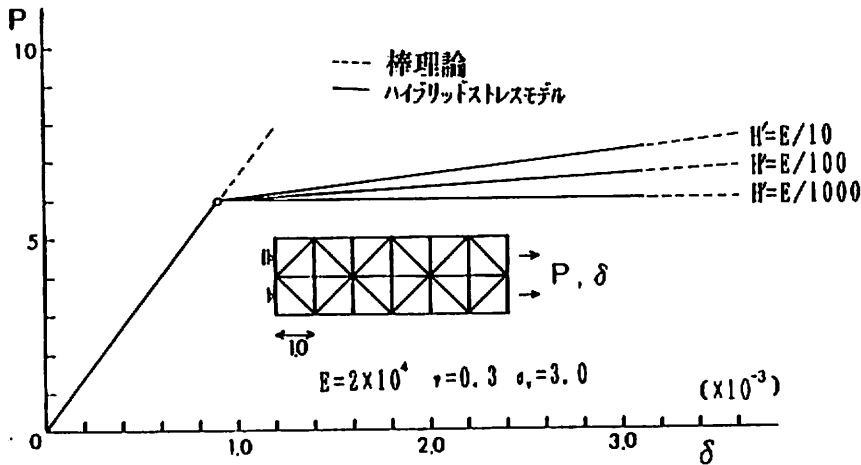


図-20 平板の一軸引張弾塑性解析における荷重と変位の関係

表-2 変位が 3.1×10^{-3} の時の荷重の比較

H'	ハイブリッドストレスモデル	棒理論
E/10	7.3333	7.3333
E/100	6.1452	6.1452
E/1000	6.0147	6.0147
E/10000	6.0045	6.0045

3-5 円孔を有する長方形板の弾塑性解析

等方硬化を示す材料の弾塑性解析例を示す。解析例は円孔を有する長方形が引張力を受ける場合で、図-21に要素分割を示してある。この板の材料特性は $\sigma_y = 24.3 \text{ kg/mm}^2$, $E = 7,000 \text{ kg/mm}^2$, $\nu = 0.2$, $H'/E = 0.032$, $L = 18 \text{ mm}$, $r = 5 \text{ mm}$ である。ここで示している計算例は P.V. Marcal ら¹⁵⁾, O.C. Zenkiwicz ら¹⁶⁾ 多くの研究者による数値例が示されている。数値計算例で用いている弾塑性剛性方程式は式(47)である。図-22にリ

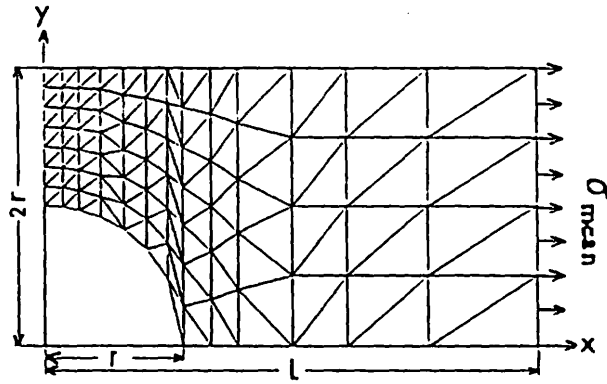


図-21 円孔を有する長方形板の弾塑性解析

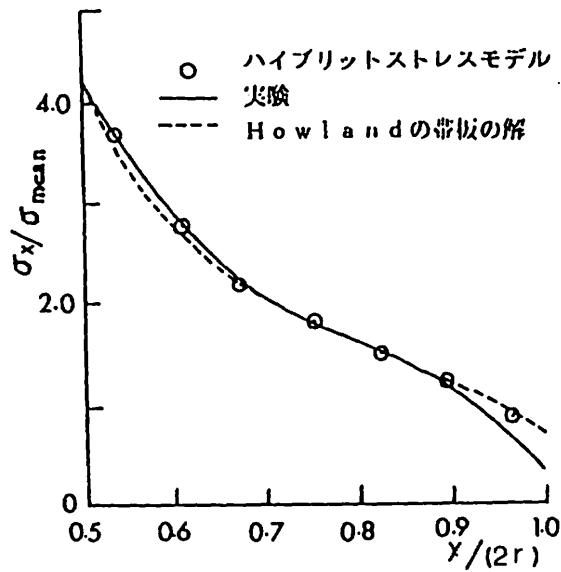


図-22 y軸上の σ_x の分布

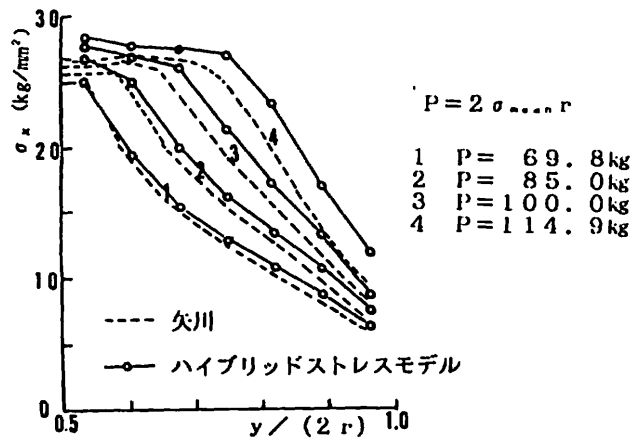


図-23 y軸上の応力分布 (弾塑性)

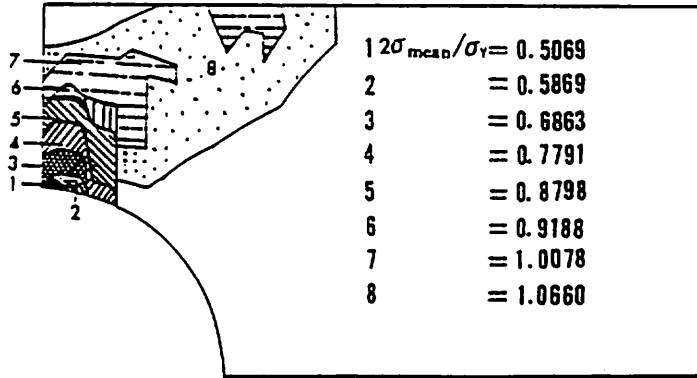


図-24 塑性域の拡大状況

軸上の σ_x の応力分布を示してあるが、応力の分布はほぼ Howland¹⁷⁾ の帯板の解に一致している。つぎに、図-23 に荷重を増加させた時の σ_x の分布を示す。同図には矢川ら¹⁹⁾ の有限要素解析の結果 ($L=20\text{mm}$, その他の条件は同じ) も示してある。荷重の小さい時は両者とも大体一致している。しかし、荷重が増加するにつれて、応力分布の差は大きくなる。図-23 で荷重段階 4 の時は $P=114.9$ であるが、 σ_x の合力を図より求めると矢川らの結果は 104.2、ハイブリッドストレスモデルは 115.4 となりハイブリッドストレスモデルは力の釣合いが大体成立していることがわかる。

つぎに、塑性域の拡大状況を図-24 に示してあるが、塑性域の形成状況は、O.C. Zenkiwicz らの結果と同様な傾向を示している。

4. むすび

二次元ハイブリッドストレスモデルを用いた弾塑性剛性方程式として完全弾塑性体およびひずみ硬化を考慮した式を示した。塑性を考慮する方法としては、塑性条件式をラグランジェの未定乗数法で変分原理に導入する方法を用いている。このとき、ラグランジェの未定乗数は要素内の塑性評価点ごとに離散的に仮定しているが、この方法で得られた弾塑性剛性方程式を用いた解析例は精度が良好であった。したがって、筆者が前報⁹⁾ で示した辺中央に 4 自由度 ($U_i, V_i, \theta_i, \epsilon_i$) をもつ二次元ハイブリッドストレスモデ

ルは、塑性条件式を要素境界で満足させることで、川井によって提案された剛体バネモデルのように、一般化された極限解析法となり、塑性条件式を要素内で満足させることで、通常よく用いられている有限要素 (定ひずみ要素, アイソパラメトリック要素等) による弾塑性解析法と同様な解析法となる。

与えられた問題に対して、要素内で塑性を表わす方法と要素境界で塑性を表わす方法の 2 方法を単独に解析に用いて、解析精度が良好かどうかを知ることも一つの応用であるが、両者を同時に用いることで、節理を有する岩盤、鉄筋コンクリート構造物における鉄筋とコンクリートとの付着問題のように、材料そのものの強度と材料間の接合面の強度の両者を考慮した問題への応用も可能である。このような問題に対しては今後の研究の課題である。

謝 辞

本研究にあたり、御助言をいただいた東京理科大学工学部：川井忠彦教授、東芝 CAE システムズ：渡辺正明博士、広島大学工学部：近藤一夫助教授、東京大学生産技術研究所：都井裕助教授、データの整理に御協力いただいた本学科技官：玉那覇宣雄氏、本学科学生：安仁屋聡氏、崎浜秀仁氏、宮良直好氏に心から感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 川井忠彦：生研セミナーテキスト (物理モ

- デルによる連続体力学の諸問題解析), 生産技術研究奨励会, 昭和54年.
- 2) 渡辺正明・川井忠彦：ハイブリッドストレスモデルによるすべり線，塑性関節線の表現，日本造船学会論文集，Vol.147，PP. 297-305，1980. 5.
 - 3) 伊良波繁雄：修正された二次元ハイブリッドストレスモデルによる非線形構造解析，構造工学論文集，Vol.32A，PP.249-254，1986. 3.
 - 4) 伊良波繁雄：修正された二次元ハイブリッドストレスモデルによる非線形構造解析——極限解析用の新しい離散化要素——，琉球大学工学部紀要，Vol.35，1988.
 - 5) C. Nyssen, P. Beckers: Dual analysis in Elasto-Plasticity, *Finit Elements in Non-linear Mechanics*, Tapir, PP.42-61, 1977. 8.
 - 6) 近藤一夫：骨組の弾塑性崩壊解析に於ける一離散手法，日本鋼構造協会第13回大会マトリックス解析法研究発表論文集，PP. 231-236，1979.
 - 7) 渡辺正明：崩壊メカニズムを表現できるハイブリッドストレスモデルを用いた要素内を降伏させる弾塑性解析，生研セミナーテキスト（川井忠彦編固体力学諸問題の離散化極限解析），PP.291-314，生産技術研究奨励会，昭和57年.
 - 8) 上田幸雄・藤久保昌彦：歪硬化を考慮した塑性選点法，日本造船学会論文集，Vol.160，1986. 11，PP.303-317.
 - 9) 鷲津久一郎：弾性学の変分原理概論，コンピュータによる構造工学講座II-3-A，培風館，1972.
 - 10) H. Eggers: Variational Principles for Elasto-Plastic continua, *J. Struct. Mech.*, 3(4), 1974-1975, PP.345-358.
 - 11) 大地羊三：拘束条件式の実用的処理，土木学会第33回年次学術講演会，第1部，PP. 39-40.
 - 12) P.C. Hodge, G.N. White: A Quantitative Comparison of Flow and Deformation Theories of Plasticity. *J. Appl. Mech.* ASME. PP.180-184, JUNE. 1950.
 - 13) Y. Yamada, N. Yosimura, T. Sakurai: Plastic Stress-strain Matrix and its Application for the solution of elastic plastic problems by finite element Method, *Int. J. Meca. Sci*, Vol.10, PP.343-354, 1968.
 - 14) 小林正樹：有限要素法による支持力解析，第19回土質工学研究発表会，PP.945-946，1984.
 - 15) P.V. Marcal, I.P. King: Elastic-Plastic analysis of two dimensional stress systems by the finite element method. *Int. J. Mech. Sci.* Vol.9, PP.143-155, 1967.
 - 16) O.C. Zienkiwicz, S. Valliappan, I.P. King: Elasto-Plastic solutions of Engineering Problems' Initial stress', *Finite Element Approach*, *Int. J. Mech. Sci.* Vol.1. PP.75-100, 1969.
 - 17) R.C.J. Howland: *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, Ser. A, Vol.229. PP.49- , 1930.
 - 18) P.S. Theocaris, E. Marketos: Elastic-Plastic anlysis of Perforated thin strips of a Strain-Hardning Material, *J. Mech. Phys. Solids.* Vol.12. PP.377-390, 1964.
 - 19) 矢川元基，西岡俊久，安藤良夫：重ね合せ法を用いた弾塑性問題の有限要素解析，日本機械学会論文集（第1部），52巻358号，昭和51.6，PP1644-1651.