



Title	修正された二次元ハイブリッドストレスモデルによる非線形構造解析 - 極限解析用の新しい離散化要素 -
Author(s)	伊良波, 繁雄
Citation	琉球大学工学部紀要(35): 23-34
Issue Date	1988-03
URL	http://hdl.handle.net/20.500.12000/17654
Rights	

修正された二次元ハイブリッドストレスモデルによる
非線形構造解析**
——極限解析用の新しい離散化要素——

伊良波 繁 雄*

Non-Linear Structural Analysis using a modified
Two Dimensional Hybrid Stress Model
—— A new discrete element for limit analysis ——

Shigeo IRAHA

Synopsis

A triangular plane element with 12 degrees of freedom based on hybrid stress model is presented. Since the element has a node at midpoint of the each boundary side. The analysis is useful for treating non-linear Problems including crack and slip. For numerical examples, the element is applied for elasto-plastic analysis of the punch problem and the V-notch specimen under tensile load. The results of numerical examples are in good agreement with the ones of Finite Element Model and Rigid Body Spring Model.

Key Words: Limit Analysis, Hybrid Stress Model, Finite Element Model.

1. まえがき

剛体バネモデルのように、要素境界で破壊を考慮する離散化モデル^{1),2)}が提案され、構造物の非線形解析に利用されるようになった。剛体バネモデルは要素重心に節点があるために、要素境界にすべりや引張破壊が生じても自由度の増加がないために、構造物の極限解析モデルとして良いモデルである。しかし、要素を剛体としているので、一次要素を除き、崩壊に到達する以前の情報に関しては信頼性が不足している。渡辺・川井はこの欠点を改善するための要素モデルとして、ハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理を用いた一連のハイブリッドストレスモデルを提案した。二次元ハイブリッド

ストレスモデルは図-1に示すように、辺中央に3個の変位パラメータを持っている。このモデルはハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理において、要素境界積分項を座標変換し、応力場を一次式の釣合応力場(応力パラメータが7個)、要素境界変位場としては要素境界に垂直方向の変位を一次式、要素境界に平行な方向の変位を一定と仮定して導かれた。渡辺・川井はこのモデルを用いて降伏条件式としてトレスカの式を仮定した時の極限解析例を示した。

二次元ハイブリッドストレスモデルは要素境界の辺中央に節点があるために、要素間のすべりや引張破壊(図-2)の処理が簡単であるので、筆者もこのモデルを用いて、地盤や鉄筋コンクリート構造物の極限解析を行った^{3),4)}。解析

受付：1987年10月31日

* 琉球大学工学部土木工学科

Dept. of Civil Engineering, Fac. of Eng.

** 本論文の内容の一部については構造工学論文集 Vol.32A において発表。

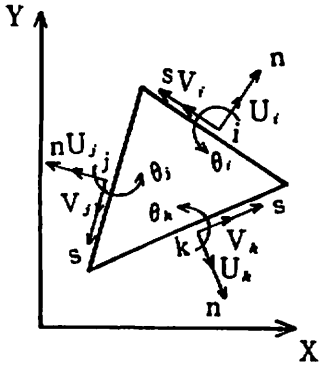


図-1 二次元ハイブリッドストレスモデル

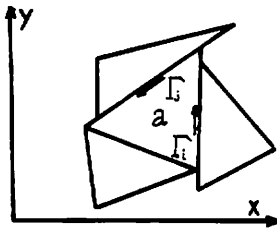


図-2 要素aの境界の破壊状況

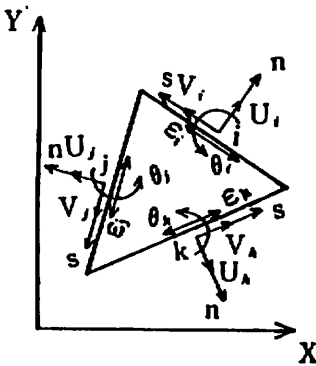


図-3 新しい二次元ハイブリッドストレスモデル

結果によれば、二次元ハイブリッドストレスモデルは極限荷重や崩壊メカニズムを知るためには良いモデルであるが、変位の精度は低い事が分かった。そこで、本報告では変位の精度を改善したモデルを示す。新しいモデルは要素内の応力パラメータを12個とし、要素境界の変位場

は要素境界に垂直方向および平行な方向に一次式を仮定している。このために、変位の自由度は図-3に示すように、辺に垂直方向の変位 (U_i)、辺に平行な変位 (V_i)、辺の回転角 (θ_i)、辺に平行な方向のひずみ (ϵ_i) の4個となっており、要素ごとの境界変位自由度は12個となる。なお、要素内の応力パラメータは要素単位で消去できるので、最終的には要素境界上の変位パラメータのみが未知量となる。

2. 解析手法

2-1 ハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理について

ハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理⁹⁾は

$$\Pi_{CH} = \Sigma \left\{ \iint_{V_n} B(\sigma_{ij}) dx dy - \int_{\partial V_n} u_i T_i ds + \int_{S\sigma_n} u_i \bar{T}_i ds \right\} \quad (1)$$

で与えられる。ここで $B(\sigma_{ij})$: コンプリメンタリエネルギー, u_i : 変位, V_n : 要素の体積, ∂V_n : 要素の境界, $S\sigma_n$: 力学的境界, σ_{ij} : 応力, T_i : $\sigma_{ij} n_j$, n_i : 方向余弦, \bar{T}_i : 外力, Σ : 要素全部の和を意味する。図-1に示すように全体座標系を x, y 軸とし、局部座標系 n, s を要素境界ごとに仮定すれば変位、応力について、それぞれ次式が成立する。

$$u_x = \ell U - m V, \quad u_y = m U + \ell V \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \ell^2 + 2\tau_{xy} \ell m + \sigma_y m^2 \\ \sigma_s &= \sigma_x m^2 + \sigma_y \ell^2 - 2\tau_{xy} \ell m \\ \tau_{ns} &= -(\sigma_x - \sigma_y) \ell m + \tau_{xy} (\ell^2 - m^2) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで、 ℓ, m は方向余弦, u_x, u_y はそれぞれ x, y 方向の変位である。 U, V はそれぞれ要素境界の n 方向, s 方向の変位を示す。式(2), (3)を用いて、式(1)の右辺第2項の積分を変換すると

$$\begin{aligned} \int_{\partial V_n} u_i T_i ds &= \int_{\partial V_n} [(\ell U - m V)(\sigma_x \ell + \tau_{xy} m) \\ &\quad + (m U + \ell V)(\tau_{xy} \ell + \sigma_y m)] ds \\ &= \int_{\partial V_n} (U \sigma_n + V \tau_{ns}) ds \quad (4) \end{aligned}$$

となる。式(1)の右辺第3項についても同様に計算できるので、式(1)は次式ようになる。

$$\Pi_{CH} = \Sigma \left\{ \int_{V_n} B(\sigma_n) dx dy - \int_{\partial V_n} (U\sigma_n + V\tau_{ns}) ds + \int_{S_{\sigma_n}} (U\bar{\sigma}_n + V\bar{\tau}_{ns}) ds \right\} \quad (5)$$

2-2 変分原理への塑性条件式の導入

すべり破壊は要素境界のみで生じるとすれば、塑性条件式は要素境界に平行な応力： τ_{ns} と要素境界に垂直な応力： σ_n のみの関数であり、剛体バネモデルと同じ塑性条件式を用いることができる。すなわち、モール・クーロン、ミーゼス、トレスカの降伏関数(図-4)を用いた時の条件式は表-1のようになる。

すべり面での条件式を満足させるために、ラグランジェの未定乗数法を用いる。モール・クーロンの降伏条件式の場合は

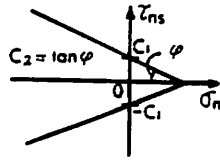
$$\Pi_{CH}^* = \Pi_{CH} - \int_{S_s} \Gamma(\tau_{ns} \pm C_2 \sigma_n) ds \quad (6)$$

となる。ここで、 Γ はラグランジェの未定乗数、 S_s はすべり面を意味する。式(6)では簡単のために、増分記号 Δ を省略して示した。なお、式(6)の付帯条件式は

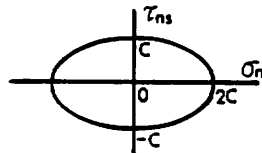
$$\left. \begin{aligned} \sigma_{i,j} &= 0 : V_n \text{内}, U = \bar{U}, \\ V &= \bar{V} : S_u \text{上}, V = 0 : S_s \text{上} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

である。 S_s 上で $V = 0$ の条件を説明する。すべり面においては垂直応力およびせん断応力の連

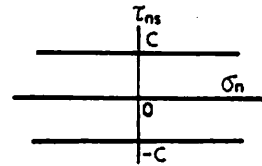
続条件、そして、塑性条件式が成立しなければならない。すなわち、



モールクーロンの降伏条件



ミーゼスの降伏条件



トレスカの降伏条件

図-4 降伏条件

表-1 すべり面での条件式

	降伏関数：f	すべり面での条件式
モールクーロン	$\tau_{ns}^2 - (C_1 - C_2 \sigma_n)^2$	$\Delta \tau_{ns} \pm C_2 \Delta \sigma_n = 0$
ミーゼス	$\tau_{ns}^2 + \sigma_n^2 / 4 - C^2$	$\Delta \tau_{ns} + \Delta \sigma_n \cdot \sigma_n / 4 \tau_{ns} = 0$
トレスカ	$\tau_{ns}^2 - C^2$	$\Delta \tau_{ns} = 0$

$$\sigma_n^a = \sigma_n^b, \tau_{ns}^a = \tau_{ns}^b \quad (8)$$

$$\tau_{ns}^a \pm C_2 \sigma_n^a = 0, \tau_{ns}^b \pm C_2 \sigma_n^b = 0 \quad (9)$$

である。ここで、a：要素a、b：要素bを意味する。すべりが生じてない時は式(8)だけで十分である。しかし、すべりが生じて塑性条件式

(9)を加えると、当然、条件式の数が増えて、不必要な条件式を含む事になる。このために、式(9)の塑性条件を用いれば、後は、(8)のどちらか一方の式を用いれば、他方は自動的に満足される。本報告では垂直応力の連続条件を用いているので、せん断応力の連続条件は不必要である。

したがって、変位：Vは元々、せん断応力の連続条件を満足させるためのラグランジェの未定乗数であるから、 $V = 0$ となる。

2-3 弾塑性剛性方程式の誘導

弾塑性剛性方程式を導くのに応力場、変位場、ラグランジェの未定乗数を仮定する必要がある。渡辺・川井は図-1の二次元ハイブリッドストレスモデルの剛性方程式を導くのに応力場、変位場をそれぞれ式(10)、(11)を仮定している(以後、モデル-1とする)。すべり面があるときは、前報^{3),4)}で示したように、式(12)のようにラグランジェの未定乗数を仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \beta_1 + y\beta_4 + x\beta_6 \\ \sigma_y &= \beta_2 + x\beta_5 + y\beta_7 \\ \tau_{xy} &= \beta_3 - y\beta_6 - x\beta_7 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$U = u_1 - \theta_1 S, V = v_1 \quad (11)$$

$$\Gamma = \Gamma_{v_1} \quad (12)$$

式(11)で u_1, v_1, θ_1 は図-1に示すように節点 i の変位である。s は局所座標系の原点からの距離である。次に、新しいモデル(以後、モデル-2とする。)では応力場、変位場、ラグランジェの未定乗数をそれぞれ、式(13)、(14)、(15)のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \beta_1 + y\beta_4 + x\beta_6 + y^2\beta_8 + x^2\beta_{10} + 2xy\beta_{11} \\ \sigma_y &= \beta_2 + x\beta_5 + y\beta_7 + x^2\beta_9 + y^2\beta_{10} + 2xy\beta_{12} \\ \tau_{xy} &= \beta_3 - y\beta_6 - x\beta_7 - 2xy\beta_{10} - y^2\beta_{11} - x^2\beta_{12} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$U = u_1 - \theta_1 S, V = v_1 - \varepsilon_1 S \quad (14)$$

$$\Gamma = \Gamma_{v_1} - \Gamma_{\varepsilon_1} S \quad (15)$$

式(14)で u_1, v_1, θ_1 は図-3に示すように節点 i の変位であるが、 ε_1 は i 点での要素境界に平行な方向のひずみを意味している。

仮定した応力場、変位場、ラグランジェの未定乗数を式(6)の変分原理に代入し停留条件式を求めれば弾塑性剛性方程式が得られるが、モデル-1の弾塑性剛性方程式の誘導については、すでに前報^{3),4)}に示したので今回はモデル-2について示す。まず、式(13)を式(10)のように表し、

ひずみ・応力関係式を式(17)のように仮定する。

$$\{\sigma\} = [B] \{\beta\} \quad (16)$$

$$\{\varepsilon\} = [C] \{\sigma\} \quad (17)$$

式(16)、(17)を用いれば、式(5)の右辺第1項の積分は次式のようなになる。

$$\int \int_{v_n} B(\sigma_n) dx dy = \{\beta\}^T [H] \{\beta\} / 2 \quad (18)$$

ここで、 $[H] = \int \int_{v_n} [B]^T [C] [B] dx dy$ 、 $\{\beta\} = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{12}\}^T$ である。式(5)の右辺第2項は、式(3)、(13)、(14)を用いれば

$$\int \int_{\partial v_n} (U \sigma_n + V \tau_{ns}) ds = \{\beta\}^T [G] \{u\} \quad (19)$$

となる。ここで、 $\{u\} = \{u_1, v_1, \theta_1, \dots, \varepsilon_1\}^T$ である。外力ベクトルを $\{\bar{F}\}$ とすれば、式(5)の荷重項は

$$\int \int_{s \sigma_n} (U \bar{\sigma}_n + V \bar{\tau}_{ns}) ds = \{u\}^T \{\bar{F}\} \quad (20)$$

となる。式(6)の第2項は式(3)、(13)、(15)を用いて

$$\int \int_{s_s} \Gamma (\tau_{ns} \pm C_2 \sigma_n) ds = \{\beta\}^T [G^*] \{\Delta\} \quad (21)$$

となる。ここで $\{\Delta\}$ は図-2の要素 a について示せば $\{\Delta\} = \{\Gamma_{v_1}, \Gamma_{\varepsilon_1}, \Gamma_{v_1}, \Gamma_{\varepsilon_1}\}^T$ となる。すなわち、式(21)はすべり線の数に関係している。つぎに、式(18)、(19)、(20)、(21)を式(6)に代入すれば

$$\begin{aligned} \Pi_{ch} = & \{\beta\}^T [H] \{\beta\} / 2 - \{\beta\}^T [G] \{u\} \\ & + \{u\}^T \{\bar{F}\} - \{\beta\}^T [G^*] \{\Delta\} \end{aligned} \quad (22)$$

となる。式(22)で $\{\beta\}$ について停留条件を求めると

$$\{\beta\} = [H]^{-1} \{[G] \{u\} + [G^*] \{\Delta\}\} \quad (23)$$

となる。式(23)を式(22)に代入し、 $\{u\}$ と $\{\Delta\}$ について停留条件を求めると

$$\left. \begin{aligned} [k_{11}] \{u\} + [k_{12}] \{\Delta\} &= \{\bar{F}\} \\ [k_{21}] \{u\} + [k_{22}] \{\Delta\} &= \{0\} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

となる。ここで、 $[k_{11}] = [G]^T [H]^{-1} [G]$ 、 $[k_{12}] = [G]^T [H]^{-1} [G^*]$ 、 $[k_{21}] = [G^*]^T [H]^{-1} [G]$ 、 $[k_{22}] = [G^*]^T [H]^{-1} [G^*]$ である。式(24)で $\{\Delta\}$ を消去すれば

$$([k_{11}] - [k_{12}][k_{22}]^{-1}[k_{21}])\{u\} = \{\bar{F}\} \quad (25)$$

となる。式(25)は、すべりによって増加した自由度を消去した弾塑性剛性方程式である。本報告では式(25)を用いて、荷重増分法で弾塑性解析を行っている。

3. 数値計算例

渡辺・川井による二次元ハイブリッドストレスモデル（モデル-1）と新しい二次元ハイブリッドストレスモデル（モデル-2）との比較を行う。まず、先端部に集中荷重が作用している片持ばりの弾性解析を行った時の変位や応力の精度の比較、円孔を有する板の応力集中問題による両モデルの比較、Vノッチを有する板の引張解析やポンチの押込み問題による崩壊荷重の比較等を示す。

3-1 片持ばりの弾性解析

要素の収束特性を見るために、図-5に示す集中荷重を受ける片持ばりの解析を行った。はりの深さ方向の分割数： N_y は1~4、長手方向の分割数： N_x は3~12の範囲である。要素の幾何学的形状は図-6の(A)に示すように正方形を2分割するパターン（パターン-Aとする）と図-6の(B)に示すように正方形をクロスに分割

するパターン（パターン-Bとする）の2種類である。はりの深さと長さの比は常に1:3である。

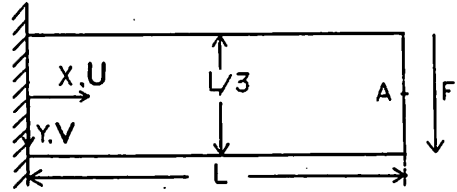
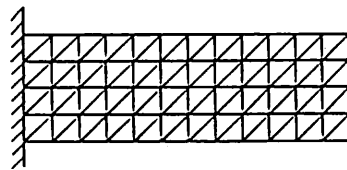
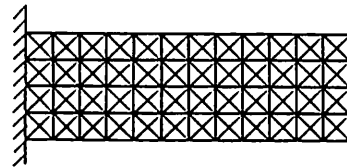


図-5 片持ばりを用いた収束特性の比較



(A) パターン A



(B) パターン B

図-6 要素分割

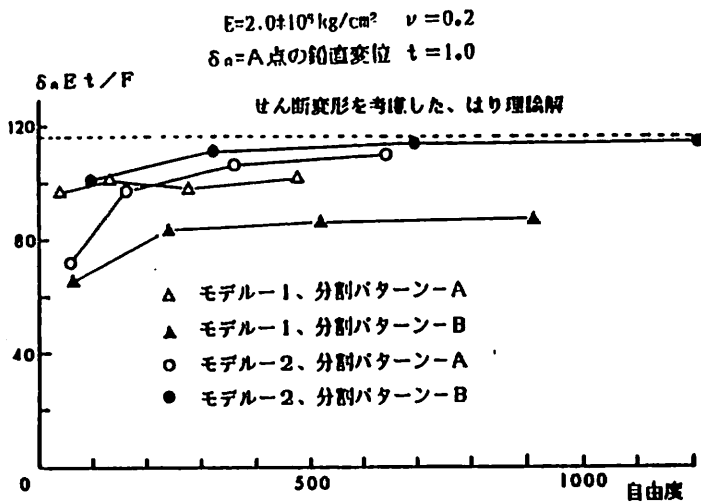


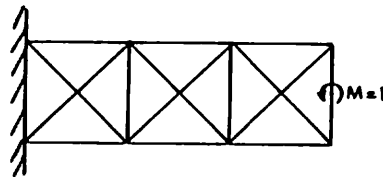
図-7 変位と自由度の関係

図-7にはモデル-1とモデル-2の収束状況を示した。モデル-1を用いた解析ではパターン-Bよりもパターン-Aの方が精度は良い。しかし、自由度(変位)が増加しても精度は向上してない。これに対し、モデル-2は自由度が増加するにつれて、いずれのパターンでも、せん断変形を考慮したはり理論解⁶⁾に近づいて行き、モデル-1よりも精度が良い事が分かる。また、モデル-2を用いた解析では、パターン-Aよりもパターン-Bの方が精度は良い。

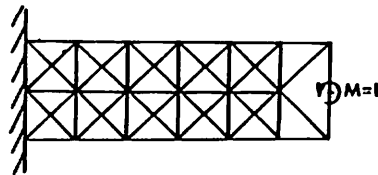
つぎに、片持ばりの先端に集中モーメントが作用する時の計算例を示す。解析に用いたはりは深さと長さの比が1:3で、図-8に示すように3タイプの要素分割を行っている。はり先端のたわみの収束状況を図-9に示す。モデル-1、モデル-2共、自由度の増加につれてはり理論解に近づいて行くが、特に、モデル-2は精度が良い。モデル-2は剛性方程式を解くことにより直接に要素境界に平行なひずみが求められるので、図-8に示すように集中モー

ントが作用する場合のひずみ分布の計算例を示す。図-10は集中モーメントが作用した時のはり上面のひずみ分布を示している。この図より、ひずみの分布は要素分割が細くなるにつれてはり理論解に近づいて行くが、はり先端付近では急激にひずみが減少していることが分かる。これは、角をはさむはり表面の力学的境界条件(外力が零)から当然の結果である。

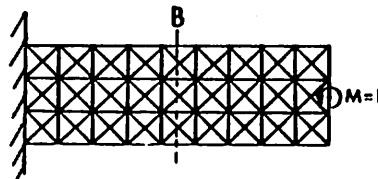
モデル-1とモデル-2を用いた時の要素内の応力(σ_x)の精度について検討を行う。解析は図-8の(C)に示す片持ばりが軸力(大きさが12の荷重)、集中モーメント(大きさが100)およびせん断力(大きさが1の荷重)を受ける時の3ケースについて行った。応力の比較は、はり中央部付近の要素重心での応力を用いている。その要素番号を図-11に示してある。そして、解析結果は表-2に示した。表-2より軸力が作用する場合は、モデル-2が棒理論解に一致しているのに対し、モデル-1は要素番号1, 4, 5でかなりの誤差を生じている。集中モー



(A) 分割パターン A



(B) 分割パターン B



(C) 分割パターン C

はりの深さ=12cm
はりの長さ=36cm
 $E = 2.0 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$
 $\nu = 0.2$

図-8 集中モーメントの作用する片持ばりの解析

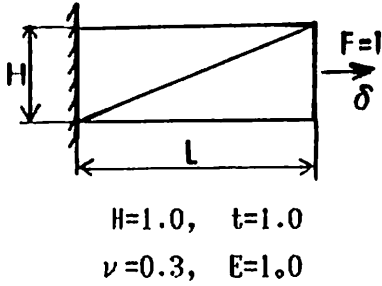


図-12 三角形平面要素による棒の表現

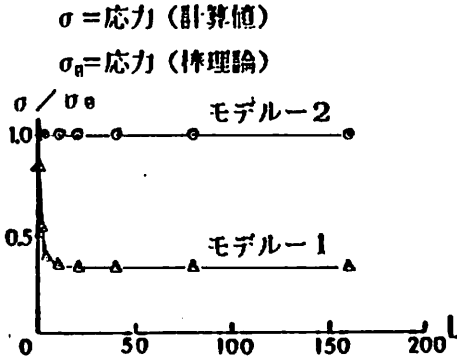


図-13 変位の比較

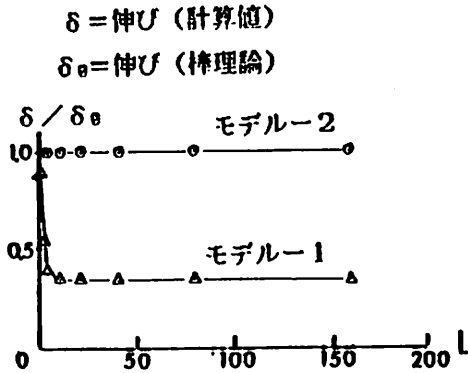


図-14 要素内応力の比較

でも、応力も変位も理論値にほぼ一致している。これより、モデル-2は棒要素として使用可能である事が分かる。

要素の形状を変えた時のモデル-1とモデル-2の比較を行う。はりは図-15に示すように、先端に集中荷重を受けている。このはりは、Cook⁷⁾

がHL要素の特性を見るために解析を行っている。HL要素は線形の変位場を仮定し要素内の応力場を

$$\sigma_x = \beta_1 + \beta_2 y, \quad \sigma_y = \beta_3 + \beta_4 x, \quad \tau_{xy} = \beta_5 \quad (26)$$

として導かれた要素で、四辺形の頂点に2自由度を持っている。図-15は、はりの長手方向に4分割、深さ方向に4分割したはり(これをN=4とする)の要素分割図である。本報告で用いている要素形状は三角形であるので、図-16に示すように四角形を2分割して解析を行っている。

表-3はモデル-1とモデル-2およびHL要素

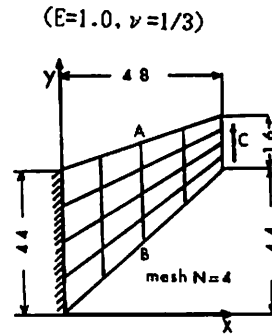


図-15 片持ばりの解析

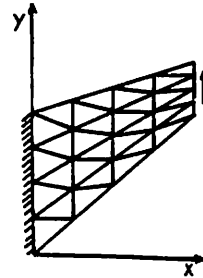


図-16 要素分割

表-3 変位の比較

要素	C点の鉛直方向変位	
	N=2	N=4
HL	18.17	22.03
モデル-1	13.17	14.19
モデル-2	17.80	21.70
HL(N=16)	23.81	

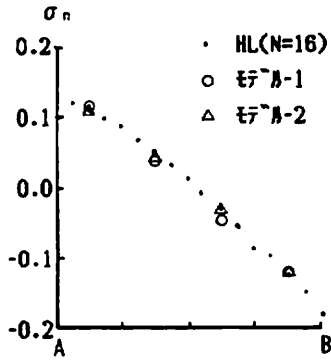


図-17 AB線上の垂直応力

素によって求められたはり先端の鉛直変位の比較を示した。このはりの厳密解はわかっていないので、HL要素を用いて細かいメッシュ(N=16)で解いたものを正解とすれば、モデル-2とHL要素は分割が細くなるにつれて、精度が向上するのに対し、モデル-1は精度の向上が小さい。しかし、N=4の時のAB線上の応力分布を図-17に示してあるが、モデル-1、モデル-2共良い値を示している。

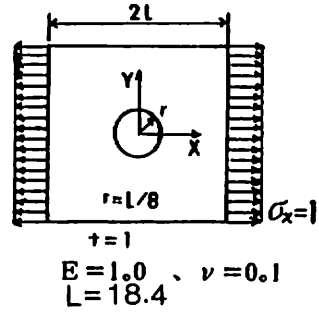


図-18 円孔を有する板の応力集中問題

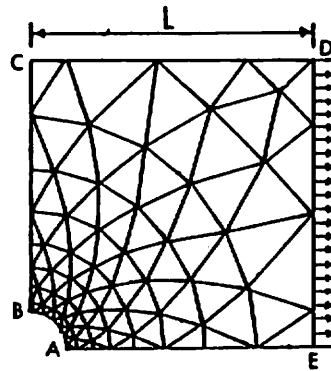


図-19 要素分割

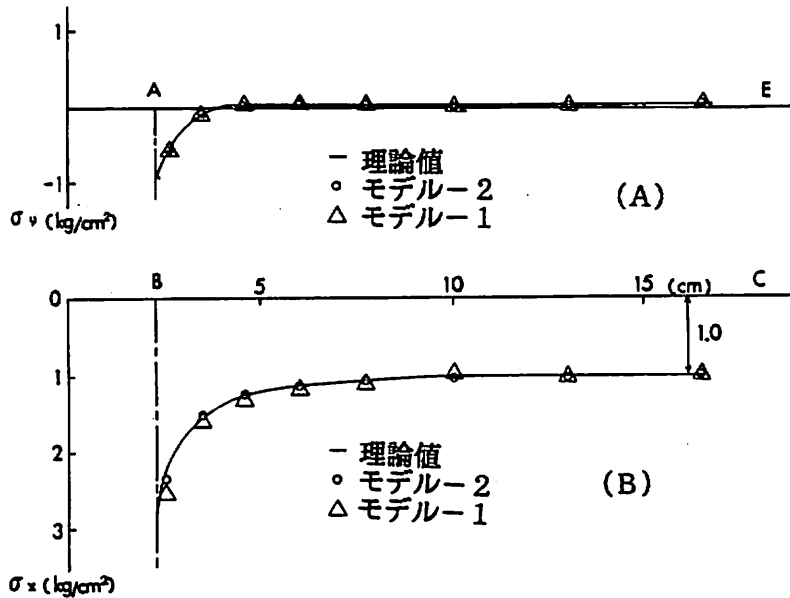


図-20 円孔周囲の応力分布

3-2 円孔を有する板の応力集中問題

要素境界の辺中央に節点を有する二次元ハイブリッドストレスモデルの特徴の一つとして、節点力から簡単に要素境界の応力が求められると云う点がある。ここでは、図-18に示すように、円孔を有する等方性板の応力集中問題を解析し要素境界の応力について理論解と比較した。解析は対称性を利用して1/4のみを用いている。この時の要素分割を図-19に示す。図-20の(A)にはAE線上の節点力（要素境界に垂直な力）より求めた応力： σ_y の分布を示した。ここでは、モデル-1とモデル-2を用いて解析を行っているが、いずれも、理論解に近い結果が得られた。図-20のBにはBC線上の σ_x の分布を示した。この場合も、理論解と大体一致する。二次元ハイブリッドストレスモデルでは節点力として要素境界面の辺中央で、辺に垂直な力とモーメントが得られる。したがって、この2つの力から要素境界面上の応力の分布を求めることができる。これを、円孔の付近のみについて示したのが図-21である。図-20の(A)を詳しく示し

たのが図-21の(A)、図-20の(B)を詳しく示したのが図-21の(B)となっている。この図でモデル-1とモデル-2を比較すると、辺中央の応力の差は小さいが、図-21の σ_x 、 σ_y を比較すると円孔縁でモデル-2が理論値に大体一致しているのに対し、モデル-1はかなりの差がある。

3-3 ポンチの押込み問題

図-22は弾塑性ブロックに剛体ポンチを押込む問題を示している。解析はトレスカの降伏条件を仮定し、平面ひずみ問題として行っている。図-23には荷重-変位曲線を示した。荷重-変位曲線の初期勾配を比較すると、有限要素法⁹⁾に一番近いのはモデル-2である。最初に降伏する時の荷重がモデル-2では高目になっているが、これは要素分割が粗いためと思われる。極限荷重を比較するとモデル-1、モデル-2とも同じ値($P/2C=1.14$)であり、すべり線解や剛体バネモデル¹¹⁾による解析値($P/2C=1.13$)と大体一致する。有限要素法による極限荷重は、すべり線解よりも少し高目となっている。

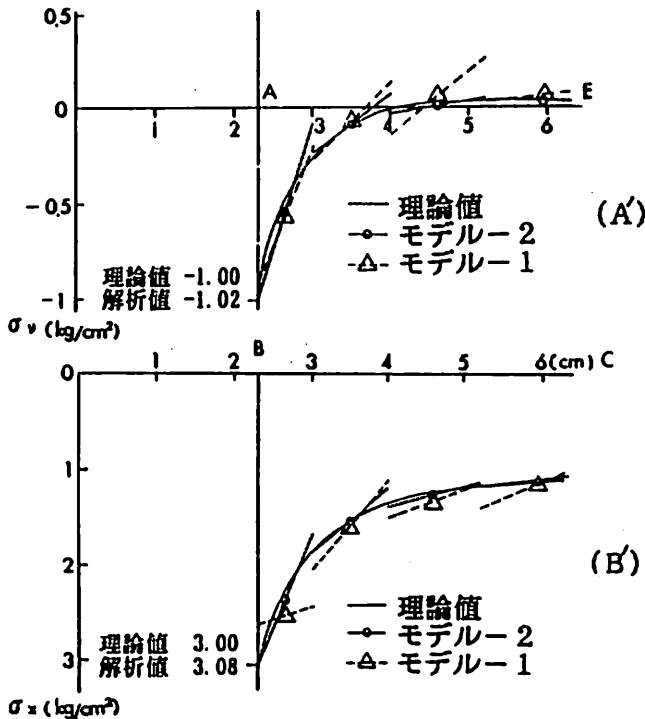


図-21 円孔周囲の応力分布（詳細図）

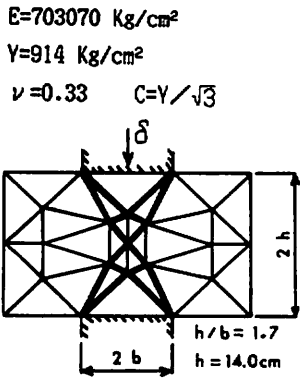


図-22 ポンチの押込み問題

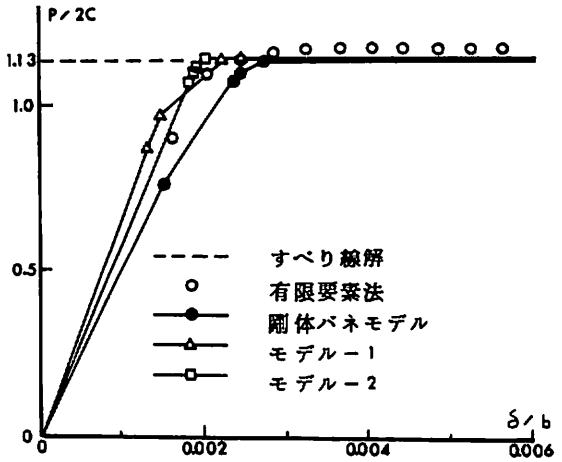


図-23 荷重-変位曲線

3-4 Vノッチを有する板の引張解析

モデル-2を用いて、図-24に示すVノッチを有する薄板の弾塑性解析を行った。解析はミーゼスの降伏条件を仮定し、平面応力問題とする。荷重は供試体の両端に強制変位を与える方法で加えている。図-25は要素分割と最終状態のすべり線を示しているが、すべり線の発生域は剛体バネモデルと大体一致している。図-26は荷重-変位曲線を示しているが、モデル-2は弾性域で有限要素法⁹⁾や剛体バネモデルと良く一致している。しかし、崩壊荷重については、剛体バネモデルやモデル-2が塑性解析解に一致しているのに対し有限要素法は少し高目となっている。

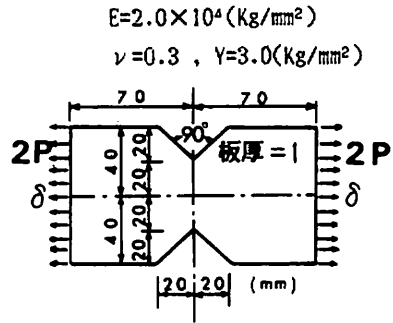


図-24 Vノッチを有する板の引張解析

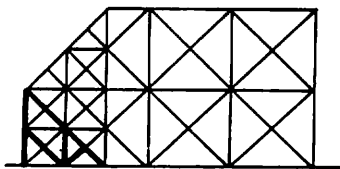


図-25 要素分割とすべり線

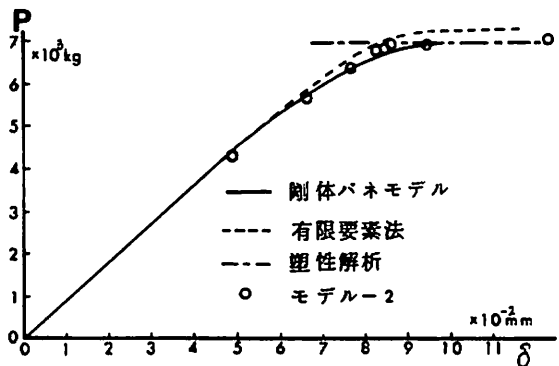


図-26 荷重-変位曲線

4. むすび

渡辺・川井によって提案された二次元ハイブリッドストレスモデルは極限解析用としては良いモデルであるが、変位および要素内の応力については精度が低い。これを改善する目的で、要素内の応力パラメータを12個、要素境界の変位パラメータを4個持つモデルを示した。新しいモデルの特徴は、自由度として要素境界の回転角と要素境界に平行なひずみを含んでいる。このために、集中モーメントを受ける構造、はり要素と平面要素でモデル化した構造物の解析に有用であると思われる。また、剛性方程式を解く事で、直接にひずみが求められると云う利点もある。

数値計算例として、片持ばりに軸力、せん断力および集中モーメントが作用する時の問題を示した。数値計算例によれば、新しいモデルは変位、要素内の応力および要素境界のひずみについて良い結果を示している。また、円孔を有する板の応力集中問題に対しても良い結果を示した。極限荷重については、ポンチの押込み問題とVノッチを有する薄板の引張解析から、新しいモデルは渡辺・川井の二次元ハイブリッドストレスモデルや剛体バネモデルと同じ解析結果を示すことが分かった。

謝 辞

本研究にあたり、御助言をいただいた東京理科大学工学部：川井忠彦教授、東芝CAEシステムズ：渡辺正明博士、広島大学工学部：近藤一夫助教授、東京大学生産技術研究所：都井裕助教授に心から感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 川井忠彦編：生研セミナーテキスト（物理モデルによる連続体力学の諸問題解析），生産技術研究奨励会，1979.
- 2) 渡辺正明，川井忠彦：ハイブリッドストレスモデルによるすべり線，塑性関節線の表現，日本造船学会論文集，PP.297～305，1980-5.
- 3) 伊良波繁雄：2次元ハイブリッドストレスモデルによる非線形構造解析，構造工学に

おける数値解析法シンポジウム論文集，PP.133～138，1985-7.

- 4) 伊良波繁雄：ハイブリッドストレスモデルによる鉄筋コンクリート構造物の非線形解析，琉球大学工学部紀要，第30号，PP.1～11，1985-9.
- 5) 鷲津久一郎：弾性学の変分原理概論，培風館，1972.
- 6) S. Timoshenko（鶴戸口英善，国尾武共訳）：材料力学，東京図書株式会社，1957.
- 7) R.D. Cook: Improved Two-Dimensional Finite Element, ASCE. ST9. PP.1851～1864, 1974.
- 8) G.C. Nayak, O.C. Zienkiewicz: Elasto-Plastic Stress Analysis, A Generalization for Various Constitutive Relations Including Strain Softning. Int. J. Num. Meth. Engng. Vol.5, PP.113-135. 1972.
- 9) Y. Yamada, N. Yoshimura, T. Sakurai: Plastic Stress-Strain Matrix and its Application for the Solution of Elastic-Plastic Problem by the Finite Element Method, Int. J. Mech. Sci, Vol.10, PP.23, 1968.