



Title	楽器音の倍音スペクトルの因子分析
Author(s)	山口, 喜七郎; 屋良, 朝夫
Citation	琉球大学教育学部紀要 第二部(26): 5-12
Issue Date	1983-01
URL	<a href="http://hdl.handle.net/20.500.12000/1892">http://hdl.handle.net/20.500.12000/1892</a>
Rights	

# 楽器音の倍音スペクトルの因子分析

山口喜七郎・屋良朝夫

## Factor Analysis of the Harmonic Spectra of the Instrumental Sound

Kisichiro YAMAGUCHI\* Asao YARA\*

(Received July 20, 1982)

### Summary

The technique of factor analysis is applied to the identification of the tone of sounds of musical instrument. The 26 kinds of sound of two trumpets, which is blown by one player, are used as the samples. The wave forms of these sounds are decomposed with Fourier transform, and transformed to sets of harmonic amplitude spectra. These sets of relative amplitudes of harmonics, which are normalized for each sound, are the data variables, and they are analyzed with the principal factor method. As a result, although several factors are formally extracted, we can find that only the first factor, which has overwhelmingly large contribution, is physically significant. And also it could be considered that the scores of this factor show the representative pattern of harmonic spectra of the sound of trumpet.

### I 緒 言

統計的分析法としての多変量解析の中で、諸種の因子分析法や主成分分析法は、心理学を含めた人文科学や社会科学、あるいは生物科学のような複雑多様な対象を扱う分野では、かなり有効な分析手法として重用されている。これらの方法のもつ情報縮約の適切な要領は、外的条件制御が比較的容易で、統計的変動分を低い比率でしか含まないと見なせる物理科学的な多変量解析に対しても活用されてよいものと思われる。近年、化学分野で、マススペクトル等のデータ解析<sup>1)</sup>に応用されている報告もある。因子分析は広く応用されているものの、対象とする変量間の連関が直線ととられること、すなわち、変量が線型空間のベクトルで表示され、ベクトル間の内積が変量間の相関値を表わすことを前提としており、こ

れが制限条件となって、異質の多変量を解析する際には抽出した因子の解釈に任意性や困難が生じ、因子に具体的な内容解釈を与えることができない場合もある。

「因子分析法は、少々頼りない多変数のデータを要約して、内部に潜んでいる特徴を見やすくするための記述の手段である。」<sup>2)</sup>ということを知れば、むしろ因子解釈の多義性を積極的に利用して、分析者として納得のいくイメージを作り、多変量データが含んでいるモデル的なものを抜き出すのに役立つと考えられるが、他方、抽出された因子に、如何に具体的な解釈を与えることができるかということが、実際に適用した分析方法と結果についての評価の尺度として見なされる面があることも無視するわけにはいかない。われわれは、前提条件としての変量の線型性が強く保証されており、従って、抽出因子に対して明確な解釈が可能であろうという点に着目し、また、情報量の縮約に効果的であるという立場を重視して、楽器(トランペット)のいくつかの音を音圧波形として記録し、それらを倍音振幅スペクトルに分解し

\* Physics Laboratory, Coll. of Educ.,  
Univ. of the Ryukyus.

て離散的な変量値に変換し、この変量群の解析に主因子分析法を適用することを試みた。

## II 測定および分析手順

### 1. トランペット音の波形記録

2個のトランペットを同一奏者に奏してもらい、それぞれについてc'の音より半音階づつ高い各音をc#まで、合計26の音を録音した。以後、2個のトランペットを(A)および(B)として区別し、トランペット(A)のc', c# d, ……、c#の13個の音に順次に変量番号1、2、3、……、13を付し、同じく(B)のc', c#、

d, ……、c#の音の変量番号を各々、14、15、16、……、26とする。これらの音の波形をオシロスコープで観察しながら、デジタルメモリーに記録収容し、読みとった。これらの電圧数値記録が、次の段階で、波形をフーリエ分解するための入力資料として用いられる。デジタルメモリーからX-Yレコーダーにより取り出した波形を、念のため、トランペット(A)と(B)、それぞれのc', e', g'の音について例示したのが、Fig. 1、Fig. 2、Fig. 3である。横軸に時間、縦軸に相対的な音圧変動値をとって図示してある。

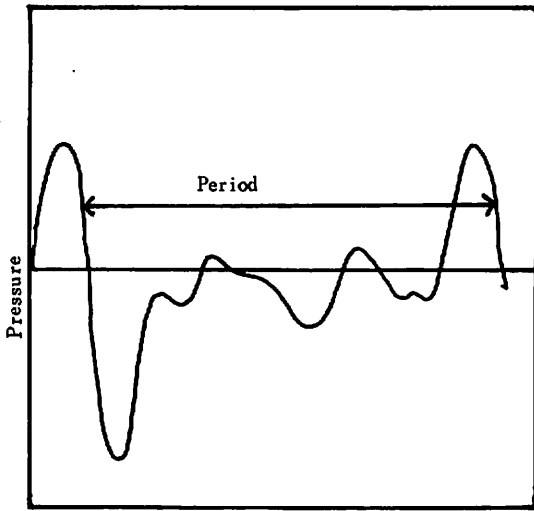


Fig. 1-A Wave form of the sound c' of trumpet (A)

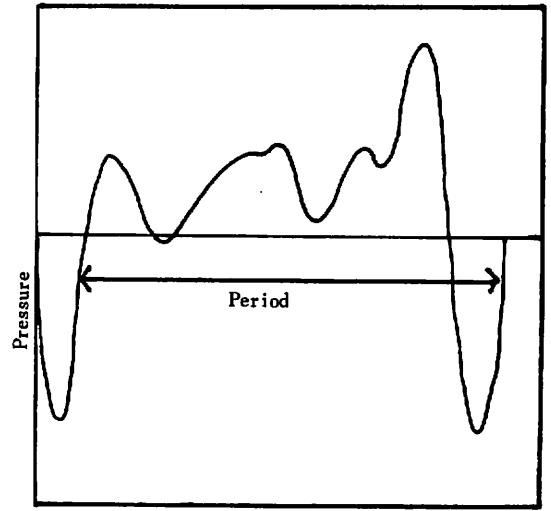


Fig. 2-A Wave form of the sound e' of trumpet (A)

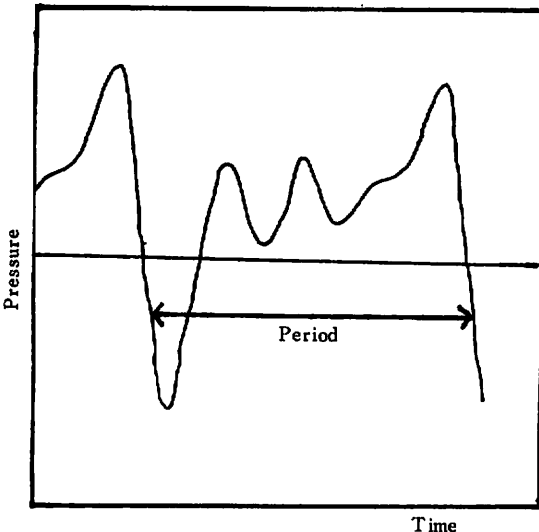


Fig. 1-B Wave form of the sound c' of trumpet (B)

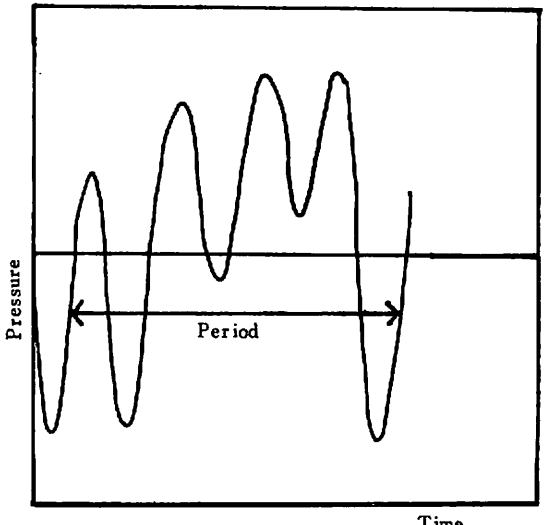


Fig. 2-B Wave form of the sound e' of trumpet (B)

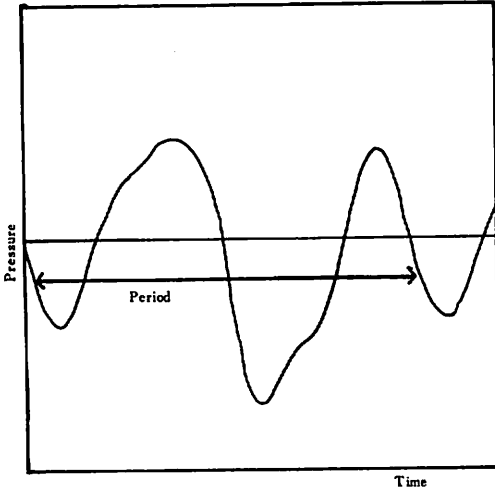


Fig. 3 - A Wave form of the sound g' of trumpet (A)

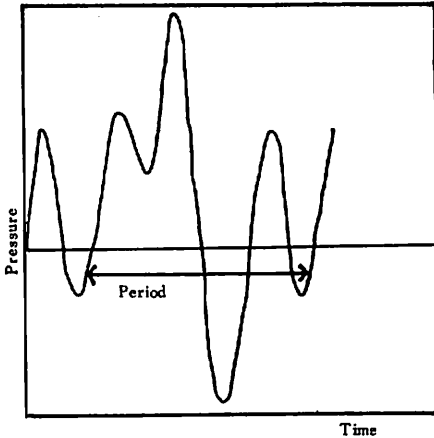


Fig. 3 - B Wave form of the sound g' of trumpet (B)

## 2. 倍音振幅スペクトル

Fig. 1 等に示される時間変数  $t$  の周期関数  $\mathcal{D}(t)$  は次のようにフーリエ展開ができる。

$$\mathcal{D}(t) = \mathcal{D}_0 + \sum_{i=1}^N \mathcal{D}_i \sin(2\pi i \nu t + \theta_i) \quad (1)$$

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (2)$$

ここで、 $T$  は周期であり、 $\nu$  は振動数である。(1)式は、周期性をもつ音波が基本振動数  $\nu$  の整数倍の振動数をもつ純音（正弦波形音）の重ねあわせ（線型結合）で表わされることを示し、振動数  $\nu$  の成分を基本音、 $i\nu$  の振動数をもつ成分を第  $i$  倍音とよんでいる。第  $i$  倍音の振幅は展開係数  $\mathcal{D}_i$  である。音楽でいう音色は、物理的には、これらの倍音振幅の相対値のスペクトルに対応するものと考えられており、初相  $\theta_i$  は波形には関係するも

の音色には無関係である。われわれの場合、計算過程において  $\theta_i$  の値を調整して、すべての  $\mathcal{D}_i$  が正値をとるようにしてある。 $\mathcal{D}_0$  は音圧変動の原点を適当にとれば 0 となり考慮しなくてもよい。従って、仮に与えられた音が第  $N$  倍音までの重ねあわせで十分に近似できるものとする、次式で考えてよい。

$$\mathcal{D}(t) \doteq \sum_{i=1}^N \mathcal{D}_i \sin(2\pi i \nu t + \theta_i), \quad \mathcal{D}_i \geq 0 \quad (3)$$

また、関数列  $\{\sin(2\pi i \nu t + \theta_i), i=1, 2, \dots, N\}$  (4) が直交関数列であることを考慮すると、倍音各々が互いに直交している  $N$  個の座標軸を作る  $N$  次元空間における、ベクトルの方向を音色に対応させることができる。ベクトルの大きさは音の強さに対応するもので、音色のみを考える場合、倍音を軸とする空間の単位ベクトルが音色を代表すると考えてよい。

以上の考察にもとづき、前述した26個の音について、計算機処理によりフーリエ展開係数を60倍音まで求め、その結果を検討して、30倍音までの展開係数を利用した。すなわち

$$[\mathcal{D}_{ij}], \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, 30 \\ j = 1, 2, \dots, 26 \end{matrix} \quad (4)$$

の数値行列を上述の測定及び計算手順により得た。 $j$  は変番号、 $i$  は倍音番号である。次に、通常に行われる標準スコアへの変換を行う代りに、次のように変数を規格化した。

$$Z_{ij} = \mathcal{D}_{ij} / \sqrt{\sum_{i=1}^{30} \mathcal{D}_{ij}^2} \quad (5)$$

$$\text{よって、} \sum_{i=1}^{30} Z_{ij}^2 = 1, \quad j = 1, 2, \dots, 26 \quad (6)$$

が成立する。 $Z_j = (Z_{1j}, Z_{2j}, \dots, Z_{30j})$  が倍音空間での単位ベクトルとなっている。

Fig. 1 ~ 3 で波形を示した音について、縦軸に倍音振幅  $Z_{ij}$ 、横軸に倍音番号  $i$  をとって、倍音スペクトルを Fig. 4、Fig. 5、Fig. 6 に例示する。

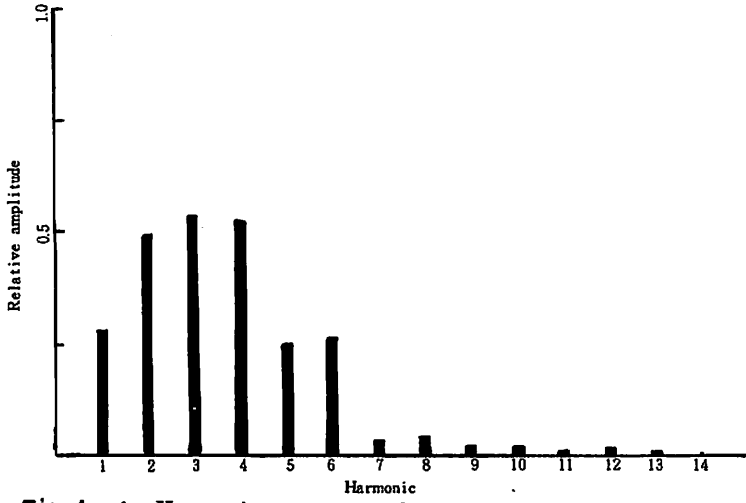


Fig.4-A Harmonic spectrum of the sound c' of trumpet (A)

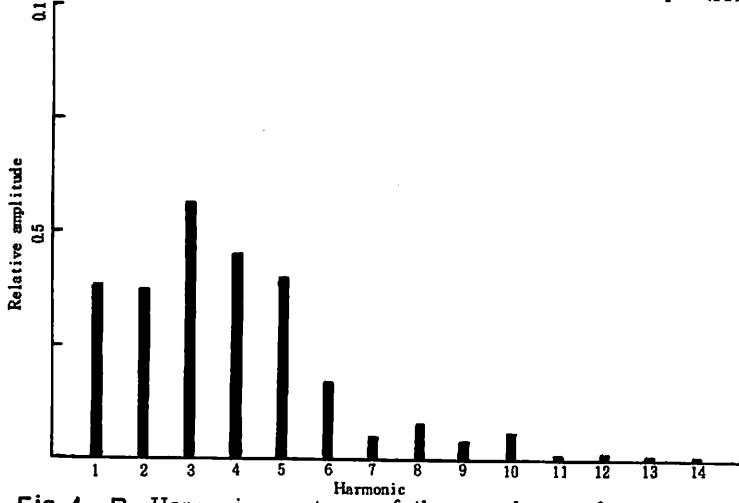


Fig.4-B Harmonic spectrum of the sound c' of trumpet (B)

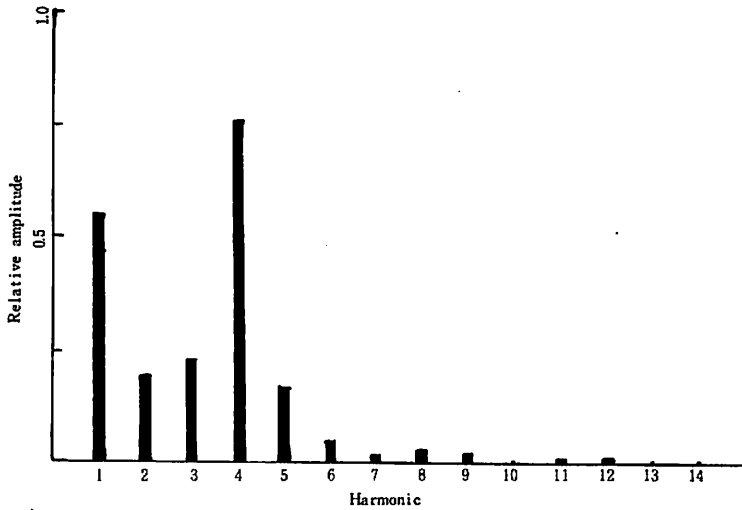


Fig.5-A Harmonic spectrum of the sound e' of trumpet (A)

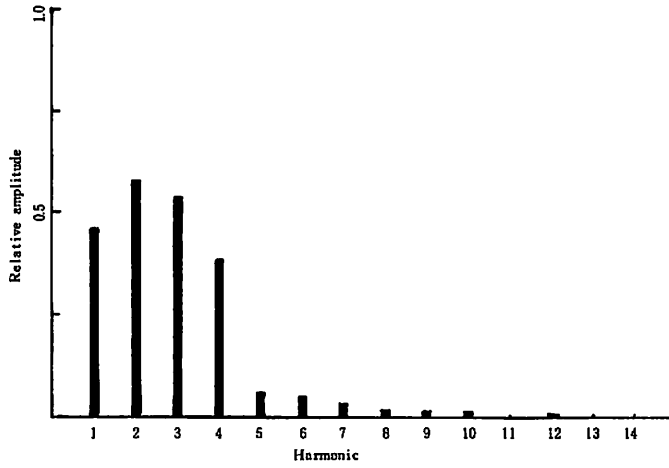


Fig.5-B Harmonic spectrum of the sound e' of trumpet (B)

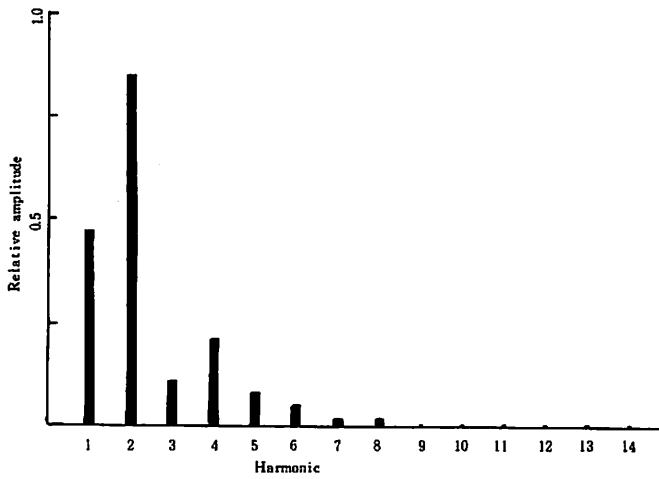


Fig.6-A Harmonic spectrum of the sound g' of trumpet (A)

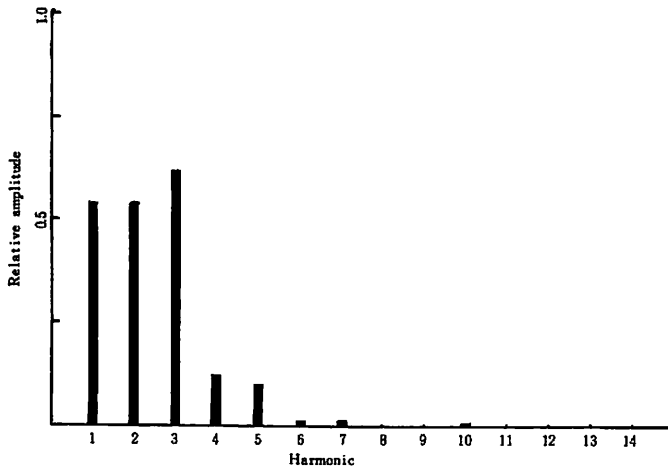


Fig.6-B Harmonic spectrum of the sound g' of trumpet (B)

3. 主因子分析

主因子分析の対象となるのは、次のデータ行列である。

$$Z = [Z_{ij}], \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, 30 \\ j = 1, 2, \dots, 26 \end{matrix} \quad (7)$$

分析手順は、因子分析の成書<sup>3)</sup>にみられるとおりのものであり、次に変量間相関行列を求める。これは、26×26対称行列である。

$$R = Z'Z = [r_{jk}] \quad (8)$$

$$r_{jk} = \sum_{i=1}^{30} Z_{ij} Z_{ik}, \quad j, k = 1, 2, \dots, 26 \quad (9)$$

ただし、Z'はZの転置行列である。また、独自因子は無視しているので、

$$r_{jj} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, 26 \quad (10)$$

である。

因子負荷行列Aを求めるには、Rを対角化するヤコビ法を用いた。次の手順である。

$$Q'RQ = I \quad (\text{対角行列}) \quad (11)$$

が成立する変換行列Qと対角行列Iを求めれば、因子負荷行列Aは次により得られる。

$$A = QA^{1/2} \quad (12)$$

また、抽出された因子数をmとし、

$$A = [a_{jk}], \quad \begin{matrix} j = 1, 2, 3, \dots, 26 \\ k = 1, 2, \dots, m \end{matrix} \quad (13)$$

$$A = [\lambda_k \delta_{kl}], \quad k, l = 1, 2, \dots, m \quad (14)$$

とすると、因子kにおける第i倍音の因子スコアは、

$$f_{ik} = \frac{1}{\lambda_k} \sum_{j=1}^{26} a_{jk} Z_{ij}, \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, 30 \\ k = 1, 2, \dots, m \end{matrix} \quad (15)$$

で与えられる。f<sub>k</sub> = (f<sub>1k</sub>, f<sub>2k</sub>, ..., f<sub>30k</sub>) は倍音空間の1つの単位ベクトルである。

最後に、抽出された因子ベクトル f<sub>k</sub> とデータベクトル Z<sub>j</sub> 間の相関、

$$(f_k \cdot Z_j) = \sum_{i=1}^{30} f_{ik} Z_{ij}, \quad \begin{matrix} j = 1, 2, \dots, 26 \\ k = 1, 2, \dots, m \end{matrix} \quad (16)$$

を求めた。

計算処理は、琉球大学計算センター FACOM M-180 IIADのTSS 端末を利用して行われた。

III 結果と結言

独自因子を無視し、Rの対角化にヤコビ法を用いたの

で、数学的には26個の因子を取り出すことができるが、測定精度を考慮して、対角行列Aの対角成分の値、すなわち因子寄与が0.01より小さい因子は切り捨てた。その結果、6個の因子が抽出された。これら因子の因子負荷および因子寄与をTable 1に示す。因子寄与の総計が26になるのに対して1番目の因子の寄与は23.5と圧倒的に大であり、2番目以降の因子はその5%にも満たない寄与しか持たない。

Table 1. Factor Loadings and Contributions

j \ k	FACTOR LORDING					
	1	2	3	4	5	6
1	0.912	0.344	0.123	-0.149	-0.060	-0.090
2	0.912	0.384	0.059	0.125	-0.005	0.032
3	0.978	0.151	-0.049	-0.032	-0.119	-0.016
4	0.962	0.150	0.155	0.039	-0.091	-0.130
5	0.796	0.466	-0.041	0.345	0.169	-0.014
6	0.910	0.038	0.268	-0.291	0.112	0.022
7	0.948	-0.126	-0.258	0.132	-0.009	-0.009
8	0.874	-0.210	0.405	0.159	-0.046	0.038
9	0.964	-0.220	0.059	0.137	0.002	-0.007
10	0.898	-0.147	-0.413	-0.019	0.007	-0.043
11	0.982	-0.151	0.030	0.077	-0.072	0.007
12	0.973	-0.198	0.111	0.004	0.036	0.003
13	0.906	-0.220	-0.063	0.350	-0.059	0.008
14	0.910	0.360	-0.045	-0.115	-0.134	0.082
15	0.992	0.089	-0.012	0.055	-0.024	0.055
16	0.950	0.245	-0.171	-0.046	0.012	0.078
17	0.985	-0.066	-0.111	-0.115	-0.010	-0.013
18	0.986	0.044	0.066	-0.084	0.113	-0.037
19	0.981	-0.015	-0.143	-0.127	0.005	0.023
20	0.982	-0.095	0.162	0.003	0.021	0.012
21	0.974	-0.139	-0.092	-0.150	0.021	0.029
22	0.960	-0.090	-0.226	-0.118	0.052	-0.033
23	0.992	0.012	0.070	0.075	0.070	-0.001
24	0.984	-0.132	0.043	-0.105	0.001	-0.004
25	0.987	-0.153	-0.047	0.008	0.019	-0.007
26	0.966	-0.208	0.131	-0.080	0.005	0.017
FC	23.45	1.09	0.72	0.55	0.12	0.05

\* k ; Number of Factor

j ; Number of Variable

FC ; Factor Contribution

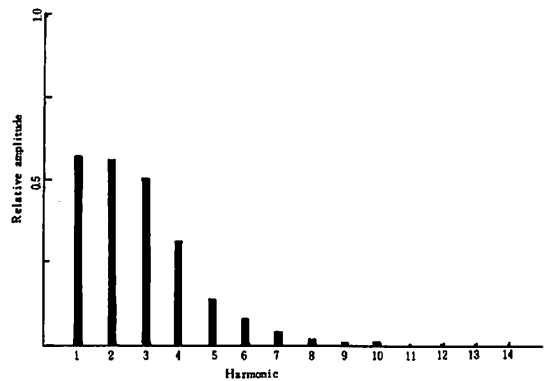
**Table 2. Factor Scores**  
(Normalized Amplitudes of Harmonics for Factor Vectors)

$i \backslash k$	FACTOR SCORE					
	1	2	3	4	5	6
1	0.567	-0.260	-0.461	0.626	-0.078	-0.014
2	0.557	-0.363	0.734	-0.118	-0.044	0.061
3	0.496	0.076	-0.441	-0.725	0.156	-0.062
4	0.307	0.771	0.224	0.256	0.428	-0.108
5	0.141	0.385	-0.011	-0.033	-0.609	0.631
6	0.077	0.206	0.062	-0.033	-0.627	-0.744
7	0.036	0.060	-0.009	-0.024	-0.089	0.097
8	0.022	0.073	0.004	-0.007	-0.092	0.097
9	0.011	0.029	-0.012	-0.003	-0.031	0.038
10	0.009	0.028	-0.010	-0.019	-0.056	0.095
11	0.004	0.006	-0.000	-0.002	0.013	0.000
12	0.004	0.009	0.001	-0.003	-0.004	-0.005
13	0.004	0.007	-0.003	-0.001	-0.012	0.004
14	0.003	0.004	0.001	0.000	-0.008	-0.009
15	0.002	0.002	0.002	0.000	-0.003	0.002
16	0.002	0.002	0.000	-0.003	-0.006	-0.003
17	0.002	0.003	-0.002	-0.002	-0.003	0.002
18	0.001	0.002	0.000	-0.002	-0.004	-0.004
19	0.002	0.002	-0.001	-0.001	-0.002	-0.003
20	0.002	0.001	-0.001	-0.001	-0.004	0.001
21	0.002	0.001	-0.002	-0.002	-0.001	0.003
22	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	-0.005
23	0.001	0.001	-0.001	-0.002	-0.001	-0.003
24	0.001	0.002	0.000	-0.001	-0.004	-0.004
25	0.001	0.001	0.000	-0.001	0.003	-0.002
26	0.001	0.001	-0.001	-0.001	-0.001	0.001
27	0.001	0.000	0.000	0.000	0.003	0.003
28	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001
29	0.001	0.002	0.000	-0.001	0.000	-0.004
30	0.001	0.002	-0.002	-0.001	-0.002	0.005

\*  $k$  ; Number of Factor  
 $i$  ; Number of Harmonic

Table 2 に、各因子のスコア、すなわち、倍音空間における、各因子ベクトルの倍音方向成分の値を示す。数値の精度を1桁おとせば、第10倍音程度までを考慮して十分であることがわかる。因子寄与の圧倒的に大きい第1因子のスコアはすべて正である。それに対して、他の

因子のスコアは第10倍音までの範囲でも負の値が表われている。このことは第1因子以外の因子ベクトルは倍音振幅として負の値を持つことになり、(3式で示した、われわれの計算過程における立場と矛盾している。これに対する一つの考え方は、第1因子以外の因子はすべて誤差に起因するものかも知れないということである。理由として、デジタル メモリーから読みとった最初の測定値が3桁の有効数字であり、また、フーリエ分解の結果を30倍音で切ったことも加えて、総体として1%程度の誤差をみこまなければならないことがあげられる。しかし、第1因子と第2因子の寄与比が23対1であることを見ると、すべてが誤差に対応するとは言えない面もある。第1因子以外の他の因子ベクトルを、それらの寄与を考慮した上で、適当に線型結合して、第1因子ベクトルと斜交する有意な因子ベクトルを作りあげる可能性もある。第1因子に斜交する物理的に意味のある因子を見つけることは、今後の課題である。一応、圧倒的に因子寄与の大きい第1因子ベクトルがトランペットの音色を同定する指標となるものと考え、その倍音スペクトルを Fig. 7 に示す。勿論、標本として26個の音をとっている事実の上に立ってのことである。



**Fig. 7 Representative harmonic spectrum of the sound of trumpet**

最後に、抽出された因子と分析の入力として用いた規格化変量間の相関を Table 3 に示す。第1因子ベクトルと変量ベクトル間の相関は、すべて0.8を超すものとみてよい。

元来、因子分析の手法は、精度をおとして大局的に情報を縮約することに意味があるので、一桁精度をおとした



Table 3. Correlations between Factors and Variables

$k \backslash j$	CORRELATION					
	1	2	3	4	5	6
1	0.912	0.344	0.123	-0.148	-0.059	-0.089
2	0.912	0.384	0.059	0.124	-0.005	0.032
3	0.978	0.150	-0.049	-0.031	-0.119	-0.014
4	0.962	0.150	0.155	0.040	-0.091	-0.132
5	0.796	0.465	-0.041	0.344	0.168	-0.014
6	0.910	0.038	0.268	-0.292	0.113	0.022
7	0.948	-0.126	-0.258	0.132	-0.009	-0.008
8	0.874	-0.210	0.405	0.159	-0.046	0.037
9	0.964	-0.221	0.059	0.136	0.002	-0.007
10	0.898	-0.147	-0.413	-0.020	0.007	-0.043
11	0.982	-0.151	0.030	0.077	-0.072	0.010
12	0.973	-0.198	0.111	0.004	0.037	0.003
13	0.906	-0.220	-0.063	0.350	-0.060	0.007
14	0.910	0.360	-0.045	-0.115	-0.135	0.081
15	0.992	0.089	-0.012	0.055	-0.025	0.053
16	0.950	0.244	-0.171	-0.046	0.012	0.079
17	0.985	-0.067	-0.111	-0.115	-0.010	-0.013
18	0.986	0.043	0.066	-0.085	0.111	-0.037
19	0.981	-0.015	-0.143	-0.127	0.006	0.023
20	0.982	-0.096	0.162	0.004	0.021	0.012
21	0.974	-0.139	-0.092	-0.149	0.022	0.029
22	0.961	-0.091	-0.226	-0.118	0.053	-0.034
23	0.992	0.012	0.071	0.075	0.070	0.001
24	0.984	-0.133	0.043	-0.106	0.002	-0.004
25	0.987	-0.153	-0.046	0.008	0.020	-0.008
26	0.966	-0.208	0.131	-0.080	0.004	0.016

\*  $k$  ; Number of Factor  
 $j$  ; Number of Variable

粗いイメージを提供したい。第1倍音より第10倍音までの10個の倍音を互いに直交する基本ベクトルとして作られる10次元線型空間を考える。その空間内に、第1、第2、……、第10倍音方向成分が(0.57, 0.56, 0.50, 0.31, 0.14, 0.08, 0.04, 0.02, 0.01, 0.01)である単位ベクトルをとる。これは、Fig. 7の倍音スペクトルに対応するものである。このベクトルを中心軸とし、この軸に対する正射影が0.8である単位ベクトルらを作る10次元空間内の円錐の中に含まれているベクトルが、トランペットの音に対応する。逆に言うと、この円錐内に入るベクトルに対応する倍音スペクトルをもつ音は、トランペットらしき音として聞こえる。

問題を残したままの結語であるが、他の因子を追及すること、他の楽器音についても調べてみること、他の因子分析の手法を適用してみることなど今後の課題として考えたい。

文 献

- 1) 阿部英次、日本化学会編、化学総説 No.18 “情報化学”、pp. 119 - 134 学会出版センター(1978)  
 R. W. Rozett, E. M. Petersen, *Anal. Chem.*, 47, 1301(1975),  
*idem, ibid.*, 47, 2377(1975)  
*idem, ibid.*, 48, 817(1976)
- 2) 水野欽司、因子分析法雑感、数理科学、第20巻 第3号, pp. 6-10(1982)
- 3) 芝祐順、“因子分析法”, 東京大学出版会  
 Comrey, A. L., “First Course in Factor Analysis”, Academic Press (1973)