



琉球大学学術リポジトリ

University of the Ryukyus Repository

Title	安全荷重域に関する研究1
Author(s)	具志, 幸昌
Citation	琉球大学農家政学部学術報告 = Science bulletin of Agriculture & Home Economics Division, University of the Ryukyus(3): 203-214
Issue Date	1956-07
URL	http://hdl.handle.net/20.500.12000/22027
Rights	

安全荷重域に関する研究 I

具 志 幸 昌*

Kosho GUSHI: A study on Safe-Domain. I

1 梗 概

安全荷重域に関する研究は、既にプラガー博士及び二見博士によってなされ、構造物の安全荷重域の概念及びその求め方更にそれによる設計法も発表されている。本論文は、これらの論文を基にして、崩壊設計法の立場から安全荷重域の性質を研究したものである。即ち、安全荷重域の境界線が所謂構造物の崩壊メカニズムの仮想的仕事式を荷重平面上にプロットしたものであることを指摘した後、崩壊メカニズムの仮想仕事式を求めて、それをプロットして行く方式で安全荷重域を求める方法を提案し、考案した定理を使って、その正当性を証明してある。次に、荷重平面上に記した設計荷重を包む安全荷重域を設定した後、その境界線が崩壊メカニズムの仮想式であることを利用して、構造物の危険断面間に成立する条件式を作り、それを連立させて解き、各危険断面に所要全塑性モーメント値を割当てるという一つの崩壊設計法を提案してある。

2 序 説

1949年以來構造物の最終的耐力とか、弾性限度以上の応力を受けた時の性状とか、構造物の塑性範囲の研究が特に盛んとなってきており、所謂リミットデザインとカリミットアナリシスという言葉がよく用いられている。弾性学と構造力学とか異なる様にリミットデザインの場合にも塑性学と崩壊設計法とは幾分おもむきが異なっているように思われる。前者はアメリカのブラウン大学のプラガー教授その他の人々が研究しているものであり¹⁾、後者はイギリスのケンブリッジ大学のベーカー教授の主導下に発達してきている²⁾。他にアメリカ土木学会及びコンクリート学会の共同研究の

* 琉球大学農家政学部

1) 文献 (1), 塑性学 (プラガー, 他著, 安部・宮本訳, 丸善発行) その他 *App. Mech.* 誌上に多数発表されている。

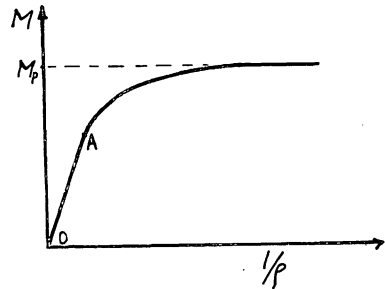
2) 文献 (2), (3), (4), (5), (6), (7) 等参照。

Ultimate load Design も構造物の塑性範囲における研究で既に実用化され、アメリカでの構造物設計法の基本となっている⁸⁾⁹⁾

構造力学に弾性学の知識が絶対に必要のように、崩壊設計法に対し塑性学は基礎理論を提供し、前者は鉄骨溶接構造物において、既にイギリスで一部実用化されている。

本論文は前記プラガー教授の提案した¹⁰⁾ Safe Domain (安全荷重域) を崩壊設計法の立場から考察し、安全荷重域の求め方及び安全荷重域による崩壊設計法を提案している。そこで本論文の基本仮定は崩壊設計法のそれと全く同じであり、崩壊設計法の仮定及び基本事項は次の如くである⁶⁾。

部材断面の抵抗モーメント・曲率曲線は第1図の如くであり、図中OA部分は直線であるが、Aをすぎると断面の縁辺より塑性に入って $M - \rho$ 曲線は横に寝始め、ある一定のモーメント値 M_p にゆるやかに近づいていく。 M_p は全塑性モーメント或はリミットモーメントといわれ、その断面においては抵抗モーメントはそれ以上にはなり得ず曲率は無限大に増加し得る。その時構造物のその断面は塑性ヒンジになったと云い、恰もその断面にヒンジが発生したような性状を呈する。普通のヒンジと異なる所は、そこに必ず全塑性モーメントが発現していること及び、ヒンジの回転が一方向にのみ起るということである。尚、実際の軟鋼の性状は第1図と殆んど一致する。



第1図

第1図の如き $M - \rho$ 曲線を有する材料で構成された剛節構造物(ピン接合を一部に含んでいてもよい)に荷重が作用すると、始めは弾性的に荷重を支持しているが、荷重が漸増するに従って、構造物は応力度の最も高い所から順次塑性に入っていく、遂にはある断面で塑性ヒンジを形成する。するとその断面では荷重がそれ以上増えても曲げモーメント値は増加しない。更に順次に他の断面でも塑性ヒンジが形成されていき、遂には構造物はメカニズムになって、それ以上の荷重には耐え得られないで、変形のみがどんどん進行するようになる。かかる状況を構造物が崩壊したと云い、或は崩壊メカニズムになったともいう。また、それを図示したものを崩壊形ということにする。実際の鉄骨構造物では材料の strain-hardening のため、変形は或る程度に止まり、更にそれ以上の荷重に耐え得る¹²⁾。

崩壊は個々の断面の塑性ヒンジ形成の順序には関係なく、その構造物がメカニズム

になるのに十分な数の塑性ヒンジが形成された時に起る。崩壊を対象に設計するのを崩壊設計と云い、崩壊設計法はこの事項を利用して発達してきたものであり、前記のベイカー教授が1949年に試行錯誤法¹³⁾を發表して以来色々な方法が提案されてきたが、中でもニール・シモンズ両氏の方法⁶⁾、ホーン氏の方法⁷⁾が特にすぐれている。

本論文の基本事項は上述の通りであるが要約すると

1. 断面が荷重の増大とともに塑性ヒンジを形成すること。
2. 崩壊以外の破壊をしないこと。従って崩壊メカニズムになるまで、各塑性ヒンジは破壊しない。
3. 各塑性ヒンジ間の弾性部分の変形は、崩壊メカニズムに対して作る、外力と塑性ヒンジとの間の仮想仕事式においては無視する。

3 安全荷重域に就て

構造物の安全荷重域とは部材長、断面等が与えられている時、その構造物の耐え得られる荷重の範囲を云い、荷重を通常座標軸にとって表示する。荷重の種類が沢山あればその数だけの次元の直交座標系が必要となるが、この論文では荷重或は荷重群を2種類に限定し、従ってその表示は2次元の平面直交座標系でできる。2種類の荷重群は鉛直方向力 Q 、水平方向力 P (或は風圧力 W) で表し、 P 、 Q を座標軸にとって、安全荷重域を表示する。以後この座標平面を荷重平面と呼ぶことにする。

耐え得られる荷重の限界をきめるのは構造物の崩壊によるものとする。崩壊設計法の立場から構造物の安全荷重域を考えると、その境界線は静的許容及び運動的充分の条件を満たしていることが判る。そして荷重が集中荷重の時は境界線は直線、分布荷重の時は2次以上の曲線となる。以下特に断わらない限り集中荷重の場合に限ることにする。

次にある構造物の任意の崩壊メカニズムを考える時、これは運動的充分な状況で、その際作用荷重と塑性ヒンジにおける全塑性モーメントのなす仕事を等しいとおく仮想仕事式を立てる時、集中荷重の場合荷重 P 、 Q に関する一次式となり、それを荷重平面上にプロットすると直線となる。この際その直線の表わす崩壊メカニズムが適当なものである時は、その直線の一部が静的許容の条件を満足することがある。つまり安全荷重域の境界線の条件を満足しているわけで、そこで、構造物の色々な崩壊メカニズムについて仮想仕事式を求め、平面上にプロットしていき、その中から静的許容なものをえらんでいき、閉多角形を作れば、構造物の安全荷重域が求まるわけである。

ここで安全荷重域に関する事項を筆者が定理にまとめ、証明したものを述べ、その応用として安全荷重域の求め方を提案することにする。その前に基礎事項を 2, 3 あげておく。

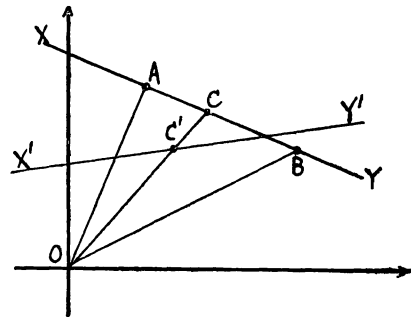
1. 一つの崩壊メカニズムには一つの仮想仕事式直線が対応する。
2. 崩壊メカニズムの仮想仕事式の表わす直線が示す荷重値は運動的充分の荷重状況を示し、つまりそれは静的許容で丁度崩壊しているか或は非許容のいずれかを示すものである。
3. 安全荷重域の境界線は運動的充分で而も静的許容な点の集合である。

〔予備定理〕 ある構造物に対する運動的充分な荷重値の示す点は荷重平面上で必ず崩壊メカニズムの仮想仕事式直線上に存在する。

(証明) 略す。

〔定理 1〕 荷重平面上である構造物の任意の崩壊メカニズムの仮想仕事式直線上の 2 点が静的許容であることが判れば、その中間の点はすべて静的許容である。

(証明) 第 2 図において XY をある崩壊メカニズムの仮想仕事式直線とする。 XY 上の任意の 2 点 A, B における曲げモーメント分布が静的許容であることが判っているものとする。 AB の中間に任意の 1 点 C をとり、 C が表わす荷重状況では静的許容な曲げモーメント分布が書けないものと仮定する。原点 O と C とを結ぶと C は運動的充分で而も非許容であるから、 OC の中間に必ず静的許容で運動的充分な点が必ず存在する。その点を C' とすると、予備定理より必ず C' を通る仮想仕事式直線が存在する。所で仮想仕事式直線は前述の如く丁度崩壊して静的



第 2 図

許容であるか或は全然非許容の場合を示すもので、その直線に関し原点と反対側の部分には静的許容な点は存在しない筈である。ここで C' は三角形 DAB の内部の点であるから C' を通る仮想仕事式直線 $X'Y'$ は O, A, B の 3 点を同時に同じ側に含むことはできない。このことは、 A, B の中少なくとも一つは非許容になることを示すものである。これは定理の題意に反する。即ち C が非許容であると仮定したことが間違いであった訳で、 C は即ち許容でなくてはならない。 C は AB 間の任意の点であるから、 A, B の中間の点はすべて静的許容となる。よって定理 1 は証明された。

〔系 1〕 荷重平面上で任意の 2 点が静的許容である時は、その 2 点と原点とを結んでできる三角形の内部及び境界上ではすべて静的許容である。

〔系 2〕 安全荷重域は凸である。

系 1, 系 2 共に証明は略す。

〔定理 2〕 崩壊メカニズムの仮想仕事式の表す直線は荷重平面上で原点を一般に通らない。

(証明) 略す。

4 安全荷重域の求め方

安全荷重域を求める方法は既にプラガー教授が発表したものがあるが¹⁰⁾、これは二見教授が指適された如く特殊な場合にのみ適用できる方法であり、二見教授は一般の場合につき安全荷重域を求める方法を 3 つ提案された¹¹⁾。本論文では崩壊メカニズムの仮想仕事式より直接に安全荷重域の境界線を求める方法を述べる。

既述の如く安全荷重域の境界線は運動的充分で而も静的許容であるから、運動的充分な崩壊メカニズムの仮想仕事式直線を求め、その中から静的許容部分をより出せば求められる。さて構造物の崩壊形には独立形と合成形とがあり、後者は前者を組合わせてできるものであり、前者の数は構造物の形状と荷重状況により定まることがニール・シモンズ両氏のすぐれた研究によって明らかにされており、その数は

$$(\text{危険断面数}) - (\text{不静定次数}) - (3 \text{ つ以上の部材が集まる節点数})$$

であることが判っている⁵⁾⁶⁾。そこで安全荷重域を求める方法は次の如くなる。

(1) 構造物の独立メカニズムを作って、その仮想仕事式直線を荷重平面上にプロットする。

(2) 合成メカニズムを作って、その仮想仕事式直線をプロットする。この際荷重の仕事が大きく、ヒンジのなす仕事小さくなるようにヒンジの位置をえらぶ。

(3) 上記の仮想仕事式直線より得られる閉多角形の中原点を取りかこむ最小のものをえらび出す。

(4) 上記えらんだ閉多角形の各頂点の荷重値について静的許容であるか否かを検する。

静的許容であれば定理 1 によりそれが求むる安全荷重域であり、そうでない時は、更に崩壊メカニズムを探す。但しこの場合は非許容となった頂点の附近の静的許容な頂点のヒンジ位置を考察することにより、許容となる頂点の位置は割合容易に求めら

れる。

例 題 1

第3図の如き荷重状況に対する構造物に対する安全荷重域を求めよ。但し○の中の値は部材の全塑性モーメント値を示す。

まず独立崩壊形を求める。

(1) 第4.1図に対して

$$3 \times 1.5M_0 + M_0 = Qa$$

$$\pm Q = 5.5M_0/a \quad (1)$$

(2) 第4.2図に対して

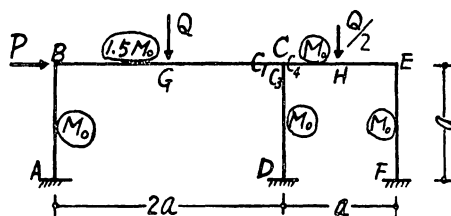
$$4M_0 = \frac{Q}{2} \times \frac{a}{2}$$

$$\pm Q = 16M_0/a \quad (2)$$

(3) 第4.3図に対して

$$6M_0 = Pa$$

$$\pm P = 6M_0/a \quad (3)$$

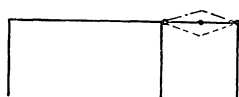


第3図



第4.1図

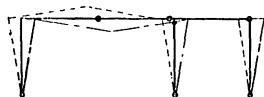
この構造物は危険断面数 10, 不静定次数 6, 3つ以上の部材が集まる節点数 1, 故に独立崩壊形は以上の3つ以外にはない。次に合成崩壊形を求める。



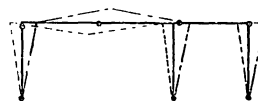
第4.2図



第4.3図



第4.4図



第4.5図

(4) 第4.4図に対して

$$(3 \times 1.5 + 5)M_0 = (P + Q)a$$

$$\pm (P + Q) = 9.5M_0/a \quad (4)$$

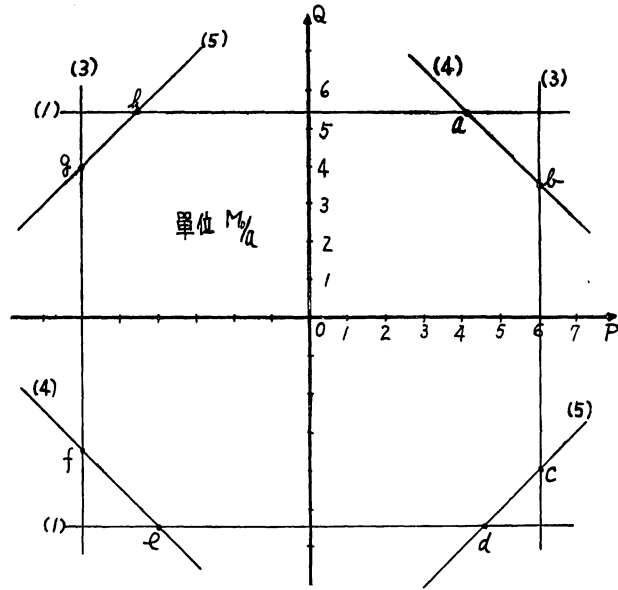
(5) 第 4.5 図に対して

$$(7+2 \times 1.5)M_0 = Pa - Qa$$

$$\pm(P-Q) = 10 M_0/a \quad (5)$$

以上の外に (2)+(3) 型のメカニズムが存在するがモーメントの仕事が大きくなるから考えない。

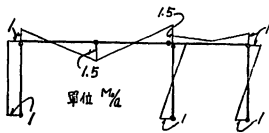
以上で一応閉多角形 $abcdefgh$ が書ける (第 5 図)。



第 5 図

次に各頂点の荷重値に対して静的許容であるか否かを検する。それには静的許容な

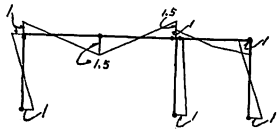
曲げモーメント図が荷重値に対して書けることを示せばよい。



第 6.1 図

a, e 点 (第 6.1 図)

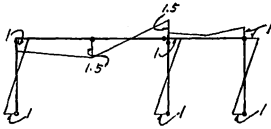
$$\left[\begin{array}{l} P = \pm 4 M_0/a \\ Q = \pm 5.5 M_0/a \text{ (複号同順, 以下同じ)} \end{array} \right.$$



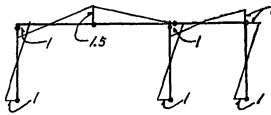
第 6.2 図

h, d 点 (第 6.2 図)

$$\left[\begin{array}{l} P = \pm 4.5 M_0/a \\ Q = \pm 5.5 M_0/a \end{array} \right.$$



第 6.3 図



第 6.4 図

b, f 点 (第 6.3 図)

$$\begin{cases} P = \pm 6 M_0/a \\ Q = \pm 3.5 M_0/a \end{cases}$$

c, g 点 (第 6.4 図)

$$\begin{cases} P = \pm 6 M_0/a \\ Q = \mp 4 M_0/a \end{cases}$$

以上より先に求めた閉多角形 $abcdefgh$ は求める安全荷重域であることが判った。

5 安全荷重域法による設計法

プラガー氏の論文には、安全荷重域から安全線分を求め、それから各危険断面の設計用全塑性モーメント値を割当てる方法がのつているが¹⁰⁾、この方法は安全荷重域を本論文の方法で求めたものを採用すれば、少しばかり次の如く加筆するだけで一般に使用し得る。それは安全線分より各断面の全塑性モーメント値を割当てる時、ある断面では2回以上も割当てられる時があり、その場合はそれら割当値の合計値をもって、その断面の設計用全塑性モーメント値として採用することである。

さて、安全荷重域の境界線は崩壊メカニズムの仮想仕事式直線であるが、この直線の傾斜は構造物の形状(部材長)と荷重状況にのみ関係し、部材または断面の全塑性モーメント値には関係しない。部材または断面の全塑性モーメント値が変化すれば、仮想仕事式直線または境界線が平行にずれるだけである。本論文の設計法はこのことを利用している。

(1) まず設計用荷重或は荷重群を点または点の群または荷重域として荷重平面上にプロットする。

(2) 次にそれらを取りかこむ安全荷重域を作製する。この場合、その構造物の崩壊メカニズムの仮想仕事式直線或は設計荷重状況に構造物部材に任意の全塑性モーメント値を与えた場合の安全荷重域の境界線となった仮想仕事式直線の傾斜を知ることが希ましい。そしてその傾斜を有する直線群で設計荷重点または荷重点群または荷重域を取りかこんだものを設計用安全荷重域というのである。

(3) 次に設計用安全荷重域の境界線の崩壊形及び仮想仕事式を求める。

(4) その仮想仕事式から危険断面の全塑性モーメント値の間に成立する式を求める。

(5) (4) で求めた式を連立させ更に適当な条件を導入して解き、各危険断面に設計用全塑性モーメントを割当ててゐる。

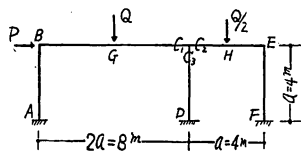
(5) の操作で未知量である危険断面の数がその条件式よりずっと多い。この事は解の存在が無数であることを示す。即ちある安全荷重域を丁度支持する構造物の危険断面の全塑性モーメント値の組は無数に存在するのであり、更に設計安全荷重域を設定するにも殆んど無数といつてもよい色々な場合があるから、ある設計荷重または荷重域を支持する崩壊設計は無数に存在することが判る。

(4) の操作で、求めた式中にすべての危険断面を含んでいる時は、(5) はそのまま解となるが、そうでない時は設計用安全荷重の各頂点の荷重値に対して設計した構造物が安全であるか否かを検する必要がある。要するに含まれなかった危険断面が安全であればよいのであって、他の検定方法によつてもよい。検定をしなくても安全であるのが明らかであることが多い。

更に定理 2 の事項はここで注意すべきことであり、原点は設計用安全荷重域の中に含まれている方がよい。

例題 2

第 7 図の形状、部材長、荷重状況を有する構造物の部材面の設計全塑性モーメント値を算出せよ。



第 7 図

但し

鉛直荷重のみが作用する時 $Q = 24 \text{ ton}$

P と Q とか同時に作用する時 $\begin{cases} Q = 12 \text{ ton} \\ Q = 18 \text{ ton} \end{cases}$

$a = 4 \text{ m}$

この構造物の仮想仕事式の傾斜は例 1 と全く同じであるから、例 1 の崩壊メカニズム及びその仮想仕事式の傾斜を利用して、計設荷重点を取りかこむように第 8 図の如く安全荷重域を作る。その境界線の崩壊メカニズム及び仮想仕事式は

境界線 (1) に対して例 1 のメカニズム (1) が対応して

$$M_B + 2M_G + M_{C1} = Qa = 24 \times 4 = 96 \text{ ton M} \quad (1)$$

境界線 (2) に対して例 1 のメカニズム (3) が対応して

$$M_A + M_B + M_{C3} + M_D + M_E + M_F = Pa = 18 \times 4 = 72 \text{ ton M} \quad (2)$$

境界線 (3) に対して例 1 のメカニズム (4) が対応して

$$M_A + 2M_G + M_{C1} + M_{C3} + M_D + M_E + M_F = (P + Q)n = 30 \times 4 = 120 \text{ ton M} \quad (3)$$

境界線に (4) 対して例 1 のメカニズム (5) が対応して

$$\begin{aligned} M_A + 2M_B + 2M_G + M_{C_2} + M_D + M_E + M_F &= (P - Q)a \\ &= (18 + 18) \times 4 = 144 \text{ ton M} \end{aligned} \quad (4)$$

未知量 9 に対して条件式は 4 つ

しかない。

(4), (2) より

$$2M_G + M_B + M_{C_2} - M_{C_3} = 72 \quad (5)$$

(3), (2) より

$$2M_G + M_{C_1} - M_B = 48 \quad (6)$$

(6), (1) より

$$M_B = 24 \text{ ton M} \quad (7)$$

故に

$$2M_G + M_{C_1} = 72$$

ここで (1) から (4) までの条件式と矛盾しない条件を 5 つ導入できることを考慮して

$M_G = M_{C_1}$ とすれば

$$M_G = M_{C_1} = 24 \text{ ton M} \quad (8)$$

所で

$$M_{C_2} + M_E + 2M_A \geq 12 \times 2 = 24$$

であるから

$M_{C_2} = M_E = M_A = M_b$ とすれば

$$M_b \geq 6 \quad (9)$$

また,

$$M_A + M_D + M_E + M_F = 48 - M_{C_3} \quad (10)$$

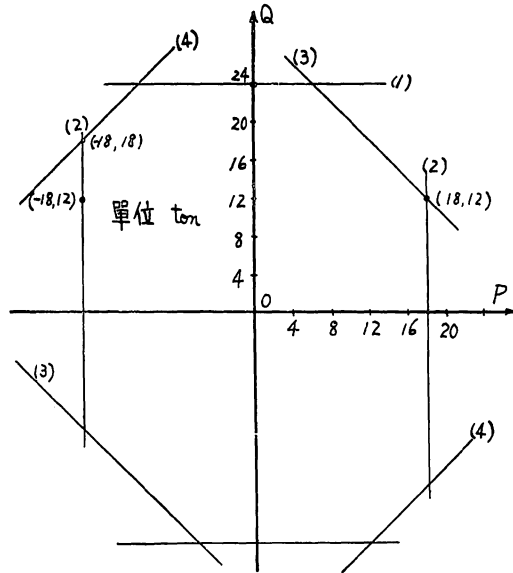
$M_b = 9 \text{ ton M}$ とすると

$M_{C_2} = M_{C_3}$ となるから

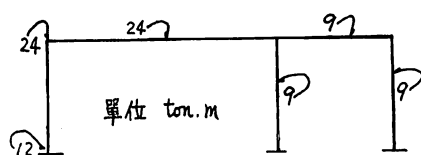
$$M_A + M_D + M_F = 30$$

$$M_D = M_F = 9 \text{ ton M} \quad \text{とすれば} \quad (11)$$

$$M_A = 12 \text{ ton M} \quad (12)$$



第 8 図



第9図

以上で各危険断面に全塑性モーメント値が割当てられたわけで、それを図示したのが第9図である。 M_H は設計安全荷重域に対し安全であるから、第8図の如く全塑性モーメント値を割当てれば第7図の荷重域

に対する設計ができた訳である。

6 結 び

安荷重域に関する定理の拡張、等布荷重の取扱い、安全荷重域の略算的求め方、設法の別法等一応結論を得ているが、それは都合により次回にゆずることとする。

尚、本研究は東京工業大学教授二見秀雄博士の御指導の下に筆者が1955年度に行った研究の一部である。二見教授並びに常に御援助を賜った同学助教授藤本盛久先生に深く感謝の意を表する次第です。また、発表の機会を与えて下さり、色々御援助下さった琉球大学農家政学部長島袋俊一教授に感謝する次第です。

参 考 文 献

1. H. J. Greenberg & W. Prager: "Limit Design of Beams and Frames" *Proc. A. S. C. E.* Vol. 77, Sep. No. 59' Feb. 1951.
2. J. F. Baker: "The Design of Steel Frames" *Structural Engineer*, Vol. 27, p. 397, Oct. 1949.
3. J. F. Baker: "A Review of Recent Investigations into the Behaviour of steel Frames in the Plastic Range" *J. of Instn. of Civil Engineers*, Vol. 31, p. 188, Jan. 1949.
4. P. S. Symonds, B. G. Neal: "Recent Progress in the Plastic Methods of Structural Analysis" *J. of Franklin Institute.*, Vol. 252, Nov., 1951.
5. P. S. Symonds, B. G. Neal: "The Rapid Calculation of the Plastic Collapse Load for a Framed Structure" *Proc. of I. C. E.*, Part III, Vol. 1, No. 1, April, 1952.
6. B. G. Neal, P. S. Symonds: "The Calculation of Plastic Collapse Loads for Plane Frames." *The Engineer*, Vol. 194, p. 317~363, 1952.
7. M. R. Horne: "A Moment Distribution Method for the Analysis and Design of structures by the Plastic Theory" *Proc. I. C. E.* Part III, Vol. 3, No. 1, April, 1954.
8. *J. of American Concrete Institute*, June, 1952.
9. "Report of A. S. C. E.-A. C. I. Joint Committee on Ultimate Strength Desing" *Proc. A. S. C. E.* Vol. 81, Paper No. 809, Oct. 1955.
10. W. Prager: "Limit Analysis and Design" *J. of A. C. I.*, Dec. 1952.

11. 二見秀雄：二種類の荷重群が作用するラーメンの安全荷重域。建築学会研究報告第31号 第1部 p. 161, 1955.
12. J. F. Baker, J. W. Roderick: "Tests on Full-Scale Portal Frames" *Proc. of I. C. E.*, Part I, 1952.

Synopsis

Studies on safe-domain were made by Dr. Prager and Dr. Futami. Concept of the safe-domain of rigid framed structures, how to seek for it, and furthermore, design by it has been made public.

This paper, on the basis of these thesis, is a study of the character of safe-domain from the standpoint of plastic collapse load design.

After pointing out that the border-line of safe-domain is nothing but virtual work equation of collapse mechanism plotted on the load plane, virtual work equations of collapse mechanism were sought for and a method of seeking for safe-domain by means of plotting them was proposed. Its reasonableness was proved by use of the devised theorem.

Following that the safe-domain which covers design load plotted on load plane was established, conditional equations which can be sub-stantiated among critical sections of rigid framed structures were formulated by use of the fact that the border-line of safe-domain is the virtual equation of collapse mechanism.

Here proposed a new plastic collapse load design in which conditional equations were solved simultaneously and value of the full plastic moment on each critical section was assigned.