



琉球大学学術リポジトリ

University of the Ryukyus Repository

Title	開放マクロ経済の最適収支動学(4.資本の限界生産力と最適貿易収支動学)
Author(s)	徳島, 武
Citation	
Issue Date	2006-02-26
URL	http://hdl.handle.net/20.500.12000/270
Rights	



国立大学法人
琉球大学
University of the Ryukyus

第4章 「資本の限界生産力と最適貿易収支動学」

1. はじめに

小国開放経済の内生的成長モデルにおける、財政収支、貿易収支、経常収支の動学的最適化分析を行った徳島（1997b）において、重大な指摘がなされた。それは投資の調整費用が存在するモデルにおいて、最適貿易収支動学が存在しないケースがあるということである。またTurnovsky（1996）においても、投資の調整費用が存在するモデルにおける最適な定常状態成長経路の存在しない可能性が指摘されている。本論文はこの課題について、社会的最適（パレート最適）の見地から、資本の限界生産力と最適貿易収支動学の関係について分析する。徳島（1997b）において、資本の限界生産力が一定もしくは逡増する場合に最適貿易収支動学が存在しないことが指摘されたが、ここではより一般的な生産関数を用いて、具体的に貿易収支動学を図示することにしよう。資本の限界生産力が一定のケースは、内生的成長モデルで多用されているAKモデルのケースに相当するので、本論文の分析は動学的最適化分析において意義あるものとなるであろう。論文の進め方としては、第2節でモデルについて説明し、第3節で投資の調整費用が存在しないケースを分析し、第4節ではそれが存在するケースを分析し、第5節で結論をまとめることにする。

2. モデル

本論文においては社会的最適（パレート最適）のための動学的最適化分析を行う。中央計画当局が第0期における代表的家計の厚生を、制約条件の下で最大化することを仮定する。代表的家計の瞬時的効用関数は

$$(2.1) \quad u_t = u(c_t, g_t)$$

である。 c_t は消費であり、 g_t は政府支出である¹⁾。右下の添字 t は時間を示している。この効用関数は非負であり、強い凹関数であって

$$0 < u_1, u_2 \quad u_{11}, u_{22} < 0$$

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} = u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21} > 0 \quad , \quad u_{12} = u_{21}$$

を仮定する²⁾。無限期間モデルを仮定すると、代表的家計の厚生は、その消費と政府支出の効用の総現在価値となり

$$(2.2) \quad \int_0^{\infty} u(c_t, g_t) e^{-\theta t} dt$$

となる。 θ は時間選好率あるいは主観的割引率であり、所与の正の値をとると仮定する。制約条件は、対外債務ストックと資本ストックの各々と、フローの変数の関係を示す式であり、

$$(2.3) \quad \dot{F}_t = c_t + i_t + g_t + \theta F_t - f(k_t, g_t, A)$$

$$(2.4) \quad \dot{k}_t = i_t$$

である。財政収支均衡を仮定している。 F_t は対外債務ストック、 k_t は資本ストックであり、対外取引は対外債務ですべて決済される。 i_t は純投資であり、 A は技術レベルを示す所与のパラメーターであり、 $f(k_t, g_t, A)$ は生産関数であって、国内純正産 (NDP) に相当する。小国の仮定より自国利率と外国利率は等しく、また θ と等しいと仮定する。

本論文における動学的最適化の分析は、以下のようにまとめられる。

$$\max \int_0^{\infty} u(c_t, g_t) e^{-\theta t} dt$$

$$s.t. \quad \dot{F}_t = c_t + i_t + g_t + \theta F_t - f(k_t, g_t, A)$$

$$\dot{k}_t = i_t$$

$$F_0, k_0 \quad \text{given}$$

$$c_t, i_t, g_t, F_t, k_t \geq 0 \quad \text{for all } t$$

制御変数は c_t, i_t, g_t であり、状態変数は F_t, k_t である。各々の変数は 1 人当たりのものであるが、人口成長はないものと仮定し、現時点 (0 時点) で的人口を 1 とする。また以下の分析では特に必要を認めない限り、右下の添字 t は省略する。

3. 投資の調整費用が存在しないケース

このケースにおけるハミルトニアンは、 $-\lambda, \beta$ を共役変数とすると

$$H = u(c, g) - \lambda \{c + i + g + \theta F - f(k, g, A)\} + \beta i$$

である。最適のための条件は

$$(3.1) \quad \frac{\partial H}{\partial c} = 0 \quad \therefore u_1 = \lambda$$

$$(3.2) \quad \frac{\partial H}{\partial i} = 0 \quad \therefore \lambda = \beta$$

$$(3.3) \quad \frac{\partial H}{\partial g} = 0 \quad \therefore u_2 = \lambda(1 - f_2)$$

$$(3.4) \quad \dot{\lambda} = \lambda\theta + \frac{\partial H}{\partial F} = 0 \quad \therefore \lambda = \text{const.}$$

$$(3.5) \quad \dot{\beta} = \beta\theta - \frac{\partial H}{\partial k} = \beta\theta - \lambda f_1$$

$$(3.6) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (-\lambda F) e^{-\theta t} = 0$$

$$(3.7) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \beta k e^{-\theta t} = 0$$

となる。 $f_1 = \partial f / \partial k$ ($0 < f_1 < 1$) は資本の限界生産力であり、

$f_2 = \partial f / \partial g (0 < f_2 < 1)$ は政府支出の限界生産力である。(3.4) より λ が一定の値となるので、(3.1) より消費の限界効用 (u_1) が一定となり、 c は一定の値である。また (3.2) より λ と β が等しいので、(3.5) より

$$\dot{\beta} = \beta\theta - \lambda f_1 = \beta(\theta - f_1) = 0$$

となり

$$\theta = f_1$$

となるので、資本ストックの横断面の条件 (3.7) も考慮すると k と g も一定の値となる³⁾。よって i はゼロとなる。またこれより f_2 も一定となるので、(3.3) より政府支出の限界効用 (u_2) が一定となる⁴⁾。以上の結果をまとめると

$$c, g, \lambda, \beta, k = \text{const.}, i = 0$$

となる。この結果より最適貿易収支の動学分析が可能となる。そのためには経常収支 (CA_t) と貿易収支 (TB_t) の両方を考慮しなければならない。各収支は

$$CA_t = -\dot{F}_t = f(k_t, g_t, A) - c_t - i_t - g_t - \theta F_t$$

$$TB_t = f(k_t, g_t, A) - c_t - i_t - g_t$$

となる。経常収支の式より

$$\dot{F}_t = -TB_t + \theta F_t$$

として両辺を積分すると、対外債務ストックの横断面の条件 (3.6) を用いて

$$(3.8) \quad F_0 = \int_0^{\infty} TB_t e^{-\theta t} dt$$

が求められる。 k_t, c_t, g_t が一定で i_t がゼロであるので、 TB_t は一定の値と

なり、 $0 < TB_t$ のとき累積貿易黒字が無限大となり、 $TB_t < 0$ のとき累積貿易赤字が無限大となる。よって (3.8) と対外債務ストックの横断面の条件 (3.6) より

$$TB_t = TB_0 = 0, F_0 = 0$$

となり、今期 (0 期) 以前から一貫して経常収支も貿易収支も均衡している状態が社会的に最適 (パレート最適) である。このケースにおける資本の限界生産力と最適貿易収支動学の関係は、無相関である。前者の通増・一定・通減に関係なく後者が存在する。また技術レベルの違いによる定性的結論に対する影響はないが、それが高いほど政府支出の限界効用は低下する。

4. 投資の調整費用が存在するケース

このケースにおけるハミルトニアンは、 $-\lambda, \lambda q$ を共役変数とすると

$$H = u(c, g) - \lambda \{c + i(1 + \phi) + g + \theta F - f(k, g, A)\} + \lambda qi$$

である。 ϕ は投資の調整費用であり

$$\phi = \phi(i/k), \phi(0) = 0, 0 < \phi', \phi''$$

である。最適のための条件は

$$(4.1) \quad \frac{\partial H}{\partial c} = 0 \quad \therefore u_1 = \lambda$$

$$(4.2) \quad \frac{\partial H}{\partial i} = 0 \quad \therefore q = 1 + \phi + \frac{i}{k} \phi'$$

$$(4.3) \quad \frac{\partial H}{\partial g} = 0 \quad \therefore u_2 = \lambda(1 - f_2)$$

$$(4.4) \quad \dot{\lambda} = \lambda\theta + \frac{\partial H}{\partial F} = 0 \quad \therefore \lambda = \text{const.}$$

$$(4.5) \quad (\lambda \dot{q}) = \lambda q \theta - \frac{\partial H}{\partial k}$$

$$(4.6) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (-\lambda F) e^{-\theta t} = 0$$

$$(4.7) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (\lambda q k) e^{-\theta t} = 0$$

となる。(4.4) より λ が一定の値となるので、(4.1) より消費の限界効用 (u_1) が一定の値となり、 c は一定の値である。また λ が一定なので (4.5) より

$$(\lambda \dot{q}) = \lambda \dot{q} = \lambda \left\{ q \theta - f_1 - \left(\frac{i}{k} \right)^2 \phi' \right\}$$

となり

$$(4.8) \quad \dot{q} = q \theta - f_1 - \left(\frac{i}{k} \right)^2 \phi'$$

が求められる。 g を一定と仮定して⁵⁾、 i 、 k 、 q の関係を分析する⁶⁾。(4.2) より

$$(4.9) \quad q = \Psi(i/k), \Psi(0) = 1, 0 < \Psi' < 1$$

の関数を定義する。この逆関数を $i/k = \varphi(q)$ と定義すると

$$(4.10) \quad \dot{k} = i = k \varphi(q), \varphi(1) = 0, 0 < \varphi' < 1$$

となる。またこの式を (4.8) へ代入して

$$(4.8') \quad \dot{q} = q \theta - f_1 - \varphi(q)^2 \phi'$$

となる。 i 、 k 、 q の関係は (4.10) と (4.8') の連立微分方程式の位相図を描くことで明らかになる。定常状態 ($dk/dt = dq/dt = 0$) においては

$$q^* = 1, \theta = f_1(k^*, g^*, A)$$

となり、この近傍の状態を分析する。上付添字*は均衡値を意味する。

$$\dot{k} = k\varphi(q) = F(k, q) = 0$$

$$\dot{q} = \theta q - f_1 = G(k, q) = 0$$

とおくと

$$\left. \frac{dq}{dk} \right|_{k=0} = -\frac{F_k}{F_q} = -\frac{\varphi(q)}{k\varphi'(q)} = -\frac{\varphi(1)}{k^*\varphi'(1)} = 0$$

$$\left. \frac{dq}{dk} \right|_{q=0} = -\frac{G_k}{G_q} = -\frac{-f_{11}}{\theta} = \frac{f_{11}(k^*, q^*, A)}{\theta} \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} 0 \Leftrightarrow f_{11} \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} 0$$

となる。右下の添字はその変数による偏導関数であることを示しており、 $f_{11} = \partial^2 f / \partial k^2$ は資本の限界生産力の通増 ($0 < f_{11}$)、一定 ($f_{11} = 0$)、通減 ($f_{11} < 0$) を意味している。資本の限界生産力が通増するとき図4-1のような不安定渦状点の、それが一定のとき図4-2のような中立不安定の、また通減するとき図4-3のような鞍点の位相図が描かれる。また代数的に分析すると線形近似の式が

$$\begin{bmatrix} \dot{k} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k^*\varphi'(1) \\ -f_{11}(k^*, q^*, A) & \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k-k^* \\ q-1 \end{bmatrix}$$

となり、係数行列式を Δ 、トレースを tr とおくと

$$\Delta = k^*\varphi'(1)f_{11}(k^*, q^*, A), \quad tr = \theta$$

$0 < f_{11}$ のとき $0 < tr, 0 < \Delta$: 不安定渦状点

$f_{11} = 0$ のとき $0 < tr, \Delta = 0$: 中立不安定

$f_{11} < 0$ のとき $0 < tr, \Delta < 0$: 鞍点

となる。横断面の条件 (4.7) より動学的に最適な経路は、資本の限界生産

力が逓減するケースの収束経路のみとなる。經常収支 (CA_t) と貿易収支 (TB_t) は

$$CA_t = -\dot{F}_t = f(k_t, g_t, A) - c_t - i_t[1 + \phi_t] - g_t - \theta F_t$$

$$TB_t = f(k_t, g_t, A) - c_t - i_t[1 + \phi_t] - g_t$$

と定義され、前節同様

$$\dot{F}_t = -TB_t + \theta F_t$$

とおくと、(3.8) の

$$(3.8) \quad F_0 = \int_0^{\infty} TB_t e^{-\theta t} dt$$

が求められる。この式は対外債務の初期値により貿易収支の動学が制約されることを意味している。ただしこの式は対外債務ストックの横断面の条件 (4.6) が満足されることが前提になっている。また貿易収支は

$$TB_t = \{f(k_t, g_t, A) - i_t[1 + \phi_t]\} - (c_t + g_t)$$

とおくと、右辺の第1項と第2項の差分となる。第2項は c と g が一定であることより一定となるので、第1項と資本ストック (k) の関係を考慮することで貿易収支の動学が分析される。資本ストック (k) が増加して純投資 (i) が正の場合は第1項は増加し、減少して負の場合は減少すると考えられる⁸⁾。資本の限界生産力が逓増するケースでは、図4-1の位相図より、資本ストック (k) は横断面の条件 (4.7) を満足せずより大きな増加と減少を繰り返して行くので、(3.8) より最適と思われる貿易収支は図4-4に示すように赤字と黒字を交互に繰り返し、しかもその不均衡は大きくなって行く。これでは対外債務ストックの横断面の条件 (4.6) も満足されない。資本の限界生産力が一定のケースでは、図4-2の位相図より、純投資 (i) が正である資本ストック (k) が増加する場合を考えると、(3.8) より最適と思

われる貿易収支は図4-5に示すように赤字から黒字となるが、資本ストック(k)が横断面の条件(4.7)を満足せず無限に増加し発散するため、黒字が無限大に大きくなり、対外債務ストックの横断面の条件(4.6)も満足されない。資本の限界生産力が逓減するケースでは、図4-3の位相図より、最適経路上で純投資(i)が正である資本ストック(k)が増加する場合を考えると、(3.8)より最適と思われる貿易収支は図4-6に示すように赤字から黒字となる。このケースでは資本ストック(k)が横断面の条件(4.7)を満足するように均衡値へ収束するので黒字の大きさも収束し、対外債務ストックの横断面の条件(4.6)も(3.8)の条件も満足される⁹⁾。本節のケースにおける最適貿易収支動学は、資本の限界生産力が逓減するケースのみに存在するのである。また技術レベルの違いによる定性的結論と政府支出の限界効用への影響は前節同様である。

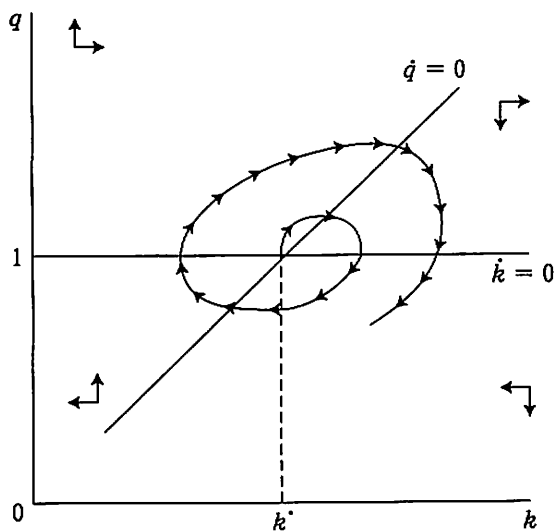


图 4-1

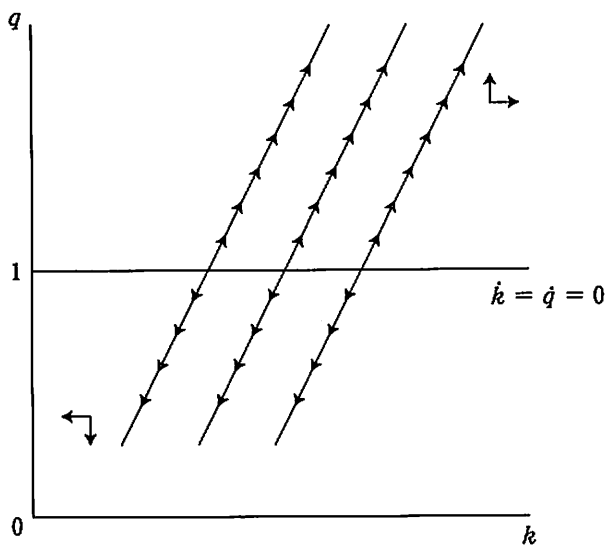


图 4-2

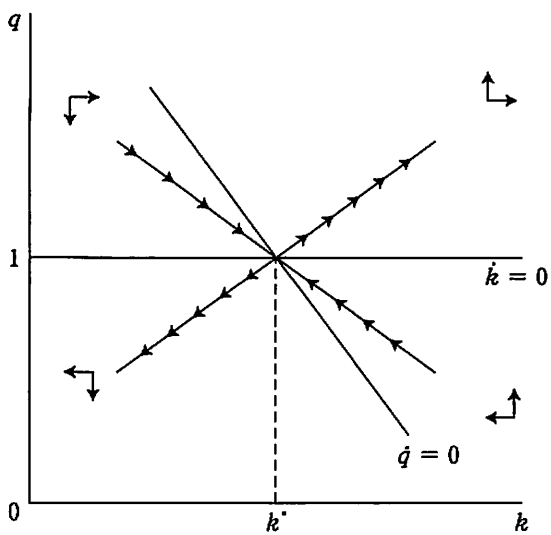


图 4-3

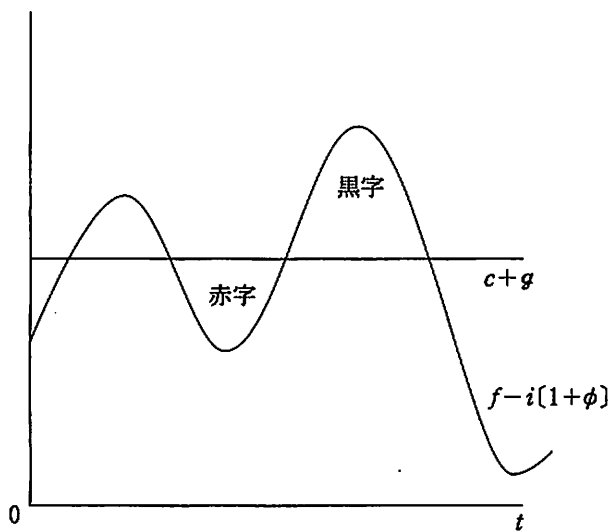


图 4-4

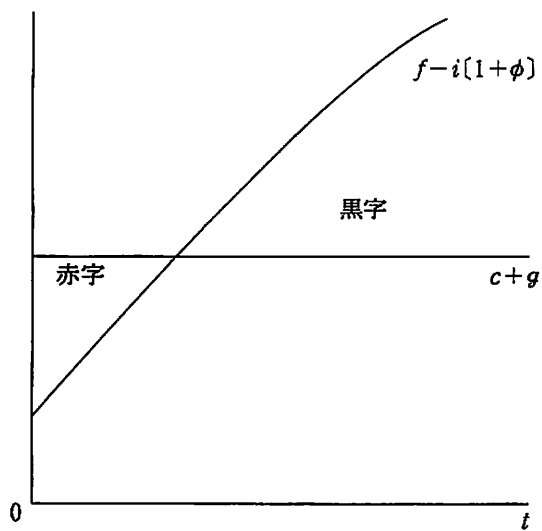


图 4-5

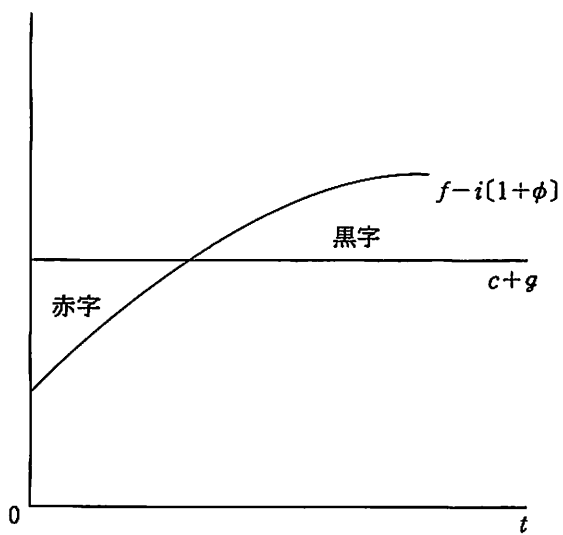


图 4-6

5. おわりに

本論文の結論は以下のようにまとめられる。

(I) 投資の調整費用が存在しないケース

資本の限界生産力の通増・一定・通減に関係なく、最適貿易収支動学が存在する。貿易収支均衡が動学的に最適である。

(II) 投資の調整費用が存在するケース

資本の限界生産力が通減するケースのみ、最適貿易収支動学が存在する。純投資が正の場合、資本ストックと対外債務ストックの横断面の条件を満足するように、赤字から黒字となるのが動学的に最適である。他のケースでは横断面の条件を満足させることができず、通増するケースではより大きくなる赤字と黒字を繰り返し、一定のケースでは純投資が正の場合、赤字から大きすぎる黒字となる。

本論文の結論より、内生的成長モデルで多用されるAKモデルは資本の限界生産力が一定のケースに相当するので、投資の調整費用が存在するモデルによる動学的最適化分析に支障が生じることが予想される。第1節で述べた Turnovsky (1996) はその1例である。内生的成長モデルによる動学的最適化分析の発展は、閉鎖経済（貿易収支均衡）において投資の調整費用が存在しない財政収支均衡を仮定したモデルにおいて、何の制約もなく望めるものであり、投資の調整費用が存在するモデルでは注意が必要である。また本論文では派生的結論であるが、技術レベルの違いが貿易収支の動学に定性的に影響せず、それが高いほど政府支出の限界効用が低下することも最後に付け加えておく。

注

- 1) 本論文のモデルは合成財のモデルであり、民間部門と政府部門の供給する財は同質である。
- 2) $u_1 = \partial u / \partial c_1$, $u_2 = \partial u / \partial g_1$, $u_{12} = \partial^2 u / \partial g_1 \partial c_1$, $u_{21} = \partial^2 u / \partial c_1 \partial g_1$
 $u_{11} = \partial^2 u / \partial c_1^2$, $u_{22} = \partial^2 u / \partial g_1^2$ である。
- 3) 資本の限界生産力は政府支出が増加（減少）すると上昇（下落）する。
- 4) いわゆる最適政府支出ルール $u_1 = u_2$ は、 $f_2 = 0$ のケース、すなわち生産関数に政府支出が含まれないケースにおいて成立する。このことは次節でも同様である。
- 5) 恒常的政府支出と恒常的税収が等しい財政収支均衡は、このケースにおける最適財政収支動学の1パターンである。徳島（1997b）参照。
- 6) 以下の分析方法は Blanchard and Fischer (1989) chap.2 を参照。
- 7) $\Psi' = 2\phi' + (i/k)\phi''$ となり、 $0 < \phi'$, ϕ'' であるので正となる。
- 8) i が正のケースでは、 $\partial\phi/\partial k = -\phi' i/k^2 < 0$, $\partial\phi/\partial i = \phi'/k > 0$ より、
 $\partial i/\partial k = (\partial i/\partial\phi)(\partial\phi/\partial k) < 0$ であり、 k の増加により i と ϕ は減少する。 i が負のケースは代数的に明らかにできない。国内純生産と純投資支出の大きさを比較すれば、第1項の増減は前者のそれによるであろう。
- 9) このケースでも最適経路以外の経路を資本ストックが動くとき、動学的に最適な貿易収支動学とならない。

参考文献

- 足立英之（1994）『マクロ動学の理論』有斐閣
井堀利宏（1996）『公共経済の理論』有斐閣
岩井克人・伊藤元重編（1994）『現代の経済理論』東京大学出版会
大和瀬達二（1987）『経済学におけるダイナミカルシステムの理論』税務経理協会
小野善康（1992）『貨幣経済の動学理論』東京大学出版会

- 河合正弘 (1994) 『国際金融論』 東京大学出版会
- 齋藤 誠 (1996) 『新しいマクロ経済学』 有斐閣
- 須田美矢子編 (1992) 『対外不均衡の経済学』 日本経済新聞社
- 大東一郎 (1996) 『内生的経済成長の基礎理論』 三菱経済研究所
- 竹中平蔵・小川一夫 (1987) 『対外不均衡のマクロ分析』 東洋経済新報社
- 津曲正俊 (1993) 『経済成長理論の新展開』 三菱経済研究所
- 徳島 武 (1996) 「小国開放経済の新古典派成長モデルにおける財政収支、経常収支
そして貿易収支の動学分析：定額一括税と動学的最適化」 『琉球大学経済研究』 第
52号, 313-328
- (1997a) 「小国開放経済の内生的成長モデル (バロー・モデル) における、
財政収支、経常収支、そして貿易収支の動学分析：定額一括税と動学的最適化」
『琉球大学経済研究』 第53号, 221-236
- (1997b) 「内生的成長モデル (ローマー=バロー・モデル) における 3 収支
の動学的最適化分析」 『琉球大学経済研究』 第54号, 21-37
- 西村清彦 (1990) 『経済学のための最適化理論入門』 東京大学出版会
- 羽森茂之 (1996) 『消費者行動と日本の資産市場』 東洋経済新報社
- 村田安雄 (1990) 「経常収支変動の異時点分析—無限期間モデル—」 『関西大学経済論
集』 第40巻第1号, 51-76
- (1994) 『現代マクロ経済学 (新版)』 有斐閣
- 山口利夫 (1994) 『最適成長理論とカオス動学の基礎』 三菱経済研究所
- Barro, R. J. (1974) "Are government bonds net wealth?", *Journal of Political
Economy* 82 (6), 1095-1117
- (1990) "Government spending in a simple model of endogenous growth",
Journal of Political Economy 98, s103-125
- and X., Sala-i-Martin (1990) "Public finance in models of economic
growth", *NBER Working Paper* No.3362
- and ——— (1995) *Economic Growth*, McGraw-Hill

- Bazdarich, M.J. (1978) "Optimal growth and stages in the balance of payments", *Journal of International Economics* 4, 425-443
- Blanchard, O.J. and S. Fischer (1989) *Lectures on Macroeconomics*, MIT Press
- Devereux, M.B. and S. Shi (1991) "Capital accumulation and the current account in a two-country model", *Journal of International Economics* 30, 1-25
- Frenkel, J.A. and A. Razin (1992) *Fiscal Policies and the World Economy second. ed.*, MIT Press
- Hayashi, F. (1982) "Tobin's marginal q and average q : a neoclassical interpretation", *Econometrica* 50 (1), 213-224
- Kamien, M.I. and N.L. Schwartz (1991) *Dynamic Optimization second. ed.*, North-Holland
- Karayalcin, C. (1994) "Adjustment costs in investment, time preferences, and the current account", *Journal of International Economics* 37, 81-95
- Lucas, R.E., Jr (1988) "On the mechanics of economic development", *Journal of Monetary Economics* 22, July 3-42
- Matsuyama, K. (1987) "Current account dynamics in a finite horizon model", *Journal of International Economics* 23, 299-313
- Petit, M.L. (1990) *Control Theory and Dynamic Games in Economic Policy Analysis*, Cambridge University Press
- Pitchford, J. (1995) *The Current Account and Foreign Debt*, Routledge
- Romer, P. (1986) "Increasing returns and long-run growth", *Journal of Political Economy* 94 (5), 1002-1037
- Sala-i-Martin, X. (1990) "Lecture notes on economic growth (II): five prototype models of endogenous growth", *NBER Working Paper* No.3564
- Serven, L. (1995) "Capital goods imports, the real exchange rate and the current account", *Journal of International Economics* 39, 79-101
- Turnovsky, S.J. (1995) *Methods of Macroeconomic Dynamics*, MIT Press

——— (1996) "Fiscal policy, growth, and macroeconomic performances in a small open economy", *Journal of International Economics* 40,41-66

Van der Ploeg, F. (ed.) (1994) *The Handbook of International Macroeconomics*, Basil Blackwell